2

Cadre d'évaluation de la culture mathématique du cycle PISA 2009

Ce chapitre définit en premier lieu la notion de culture mathématique retenue dans le cadre de l'enquête PISA et explique les fondements théoriques du cadre d'évaluation. Ce cadre d'évaluation PISA de la culture mathématique s'organise selon un certain nombre de catégories différentes : situations ou contextes ; contenus mathématiques ; et compétences mathématiques. Il inclut également quatre idées majeures : espace et formes ; variations et relations ; quantité ; et incertitude. Le présent chapitre décrit les compétences et processus requis pour résoudre les items PISA de culture mathématique, et explique la classification des trois groupes de compétence : reproduction ; connexion ; et réflexion. Il inclut également des exemples d'items provenant de l'enquête PISA afin d'illustrer au mieux le cadre conceptuel et, enfin, analyse la façon dont les compétences en mathématiques sont évaluées pour l'analyse et la communication des résultats.

INTRODUCTION

Ce cadre décrit et illustre l'évaluation PISA de mathématiques. On emploie l'expression « culture mathématique » pour insister sur le fait que l'évaluation PISA des compétences en mathématiques porte sur la capacité des élèves à restituer des connaissances en mathématiques et à effectuer les tâches d'évaluation PISA qui leur demandent d'extrapoler à partir de ce qu'ils ont appris à l'école et d'appliquer des savoirs mathématiques pour résoudre des problèmes authentiques, situés dans des contextes variés. Les processus mathématiques à mettre en œuvre pour ce faire sont basés sur des savoirs et savoir-faire mathématiques : ce sont les compétences mathématiques cognitives. Comme dans les autres cadres d'évaluation PISA, ce cadre d'évaluation de la culture mathématique se décline essentiellement en *contextes* dans lesquels on utilise les mathématiques, en *contenus* et en *processus mathématiques*, toutes dimensions qui découlent directement de la définition du domaine. Dans ce chapitre, l'analyse des contextes et des contenus décrit les caractéristiques des problèmes qui se posent aux élèves en qualité de citoyens, tandis que l'analyse des processus porte sur les savoirs et savoir-faire mathématiques que les élèves doivent exploiter pour résoudre ces problèmes. Ces processus sont répartis en trois groupes pour montrer plus clairement comment des processus cognitifs complexes sont traités dans un programme d'évaluation structuré.

DÉFINITION DU DOMAINE

L'évaluation PISA de *mathématiques* porte sur la capacité des élèves à analyser, à raisonner et à communiquer efficacement des idées lorsqu'ils posent, formulent et résolvent des problèmes mathématiques ou en interprètent les solutions, dans des contextes très variés. L'évaluation PISA de la culture mathématique privilégie les problèmes du monde réel et va au-delà des situations et des problèmes qu'il est d'usage d'aborder en classe. Dans le monde réel, les citoyens sont régulièrement placés dans des situations dans lesquelles l'exploitation des facultés de raisonnement quantitatif ou spatial ou d'autres compétences mathématiques contribue à clarifier, à énoncer ou à résoudre des problèmes, lorsqu'ils font leurs courses ou la cuisine, voyagent, gèrent leur budget, réfléchissent à des questions politiques, etc. Ces divers usages des mathématiques se fondent sur les compétences acquises et mises en pratique lors de la résolution de problèmes que l'on rencontre typiquement dans les manuels scolaires et en classe. Il faut toutefois mettre en œuvre ces compétences dans un contexte moins structuré, où les consignes ne sont pas aussi claires et où l'élève doit prendre des décisions sur les connaissances qui pourraient être pertinentes et sur la manière de les appliquer à bon escient.

Les citoyens de tous les pays sont de plus en plus souvent confrontés à des tâches qui impliquent des concepts mathématiques quantitatifs, spatiaux, statistiques ou autres. Les médias par exemple (journaux, magazines, télévision, Internet) foisonnent d'informations présentées sous la forme de tableaux, de graphiques et de schémas, dans des domaines comme l'économie, la météorologie, la médecine et le sport – pour n'en citer que quelques-uns. Les citoyens doivent également pouvoir lire des formulaires, interpréter les horaires des transports publics, effectuer des transactions financières, choisir le produit qui présente le meilleur rapport qualité-prix du marché, etc. L'évaluation PISA de la culture mathématique se focalise sur la capacité des élèves de 15 ans (l'âge auquel de nombreux élèves arrivent au terme des cours de mathématiques obligatoires) à exploiter leurs acquis mathématiques pour comprendre ces problèmes et mener à bien les tâches qui en découlent.

La définition de la *culture mathématique* retenue dans l'enquête PISA est la suivante :

> La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.

Quelques explications s'imposent pour clarifier cette définition :

- L'expression « culture mathématique » a été choisie pour mettre l'accent sur l'utilisation fonctionnelle de connaissances mathématiques dans un grand nombre de situations, de manière variée et réfléchie. Bien entendu, pour qu'une telle utilisation des mathématiques soit réellement possible et effective, quantité de savoirs et de savoir-faire mathématiques fondamentaux sont indispensables. Ainsi, la maîtrise d'une langue présuppose un vocabulaire riche et une connaissance approfondie des règles grammaticales, de la phonétique, de l'orthographe, etc. – sans toutefois se limiter à ces aspects. Pour communiquer, les individus combinent ces éléments de manière créative, en réponse aux diverses situations qu'ils rencontrent dans la vie courante. De même, la *culture mathématique* ne peut se réduire à la connaissance de la terminologie, de propriétés et de procédures mathématiques, ni à la maîtrise de savoir-faire mathématiques permettant d'effectuer certaines opérations ou d'appliquer certaines méthodes, même si tout cela est nécessaire. Ce qui caractérise la *culture mathématique*, c'est la mise en œuvre créative de ces compétences pour répondre aux exigences découlant de situations externes.

- Le terme « monde » signifie dans cette définition l'environnement physique, social et culturel dans lequel vit l'individu. Comme l'affirme Freudenthal (1983), « les concepts, les structures et les idées mathématiques ont été créés en tant qu'outils d'organisation des phénomènes du monde physique, social ou mental » (p. ix).
- L'expression « s'engager dans des activités mathématiques » se rapporte au fait d'utiliser les mathématiques et de résoudre des problèmes mathématiques, mais fait aussi référence à une forme plus large d'engagement personnel, comme le fait de communiquer, de prendre position, d'établir des liens, d'évaluer les mathématiques, voire de les apprécier et d'y trouver du plaisir. La définition de la *culture mathématique* comprend donc l'usage fonctionnel des mathématiques *stricto sensu*, mais aussi la préparation à de futures études ainsi que les dimensions esthétiques et récréatives des mathématiques.
- Le terme « vie » renvoie à la vie professionnelle et privée de l'individu, à sa vie sociale au contact de son entourage et de ses proches, ainsi qu'à sa vie en tant que citoyen et membre d'une communauté.

Au cœur même de la notion de *culture mathématique* se trouve la capacité de poser, de formuler, de résoudre et d'interpréter des problèmes à l'aide des mathématiques dans des situations et des contextes très divers, depuis des situations purement mathématiques jusqu'à celles qui ne présentent, au départ, aucune structure mathématique visible – celle-ci devant être introduite par la personne qui pose ou résout le problème. Il faut également insister sur le fait que cette définition n'inclut pas uniquement un niveau élémentaire de connaissances mathématiques, mais qu'elle s'applique à la mise en œuvre des mathématiques dans des situations présentant toutes sortes de problèmes, des plus quotidiens et simples jusqu'aux plus inhabituels et complexes.

FONDEMENTS THÉORIQUES DU CADRE PISA DE CULTURE MATHÉMATIQUE

La définition de la *culture mathématique* retenue dans l'enquête PISA est en adéquation avec la théorie globale et intégrée de la structure et de l'usage du langage que décrivent des études récentes en matière de compétences socio-culturelles. Dans l'ouvrage de James Gee, *Preamble to a Literacy Program* (1998), le terme anglais de « literacy » (l'aptitude à lire et à écrire en général) renvoie à l'usage que les individus font du langage. La capacité de lire, d'écrire, de comprendre et de parler une langue est l'outil le plus important que nous ayons à notre disposition : c'est le vecteur de l'activité sociale humaine. En fait, chaque langue et chaque usage de la langue se caractérisent par une structure élaborée reliée de manière complexe à une série de fonctions différentes. Savoir lire et écrire une langue implique la maîtrise d'une grande partie des ressources de la structure de cette langue ainsi que la faculté d'exploiter ces ressources dans différentes fonctions sociales. De même, si l'on considère les mathématiques comme un langage, les élèves doivent non seulement se familiariser avec les caractéristiques structurelles du discours mathématique (les termes, les faits, les signes et symboles, les procédures, la capacité à effectuer certaines opérations dans des sous-domaines mathématiques spécifiques et l'organisation de ces concepts dans chacun des sous-domaines), mais aussi apprendre à utiliser ces concepts pour résoudre des problèmes qui sortent de l'ordinaire, dans diverses situations définies en termes de fonctions sociales. Il y a lieu de souligner que les caractéristiques structurelles des mathématiques n'impliquent pas uniquement la maîtrise des concepts, procédures et termes fondamentaux qui sont généralement enseignés à l'école, mais également le fait de savoir comment ces caractéristiques sont structurées et utilisées. Malheureusement, force est de constater qu'une bonne connaissance des caractéristiques structurelles des mathématiques ne va pas forcément de pair avec la compréhension de leur structure ou de leur mode d'exploitation aux fins de résolution de problèmes. L'exemple suivant illustre cette notion théorique d'interaction entre caractéristiques structurelles et fonctions qui sous-tend le cadre d'évaluation PISA de la *culture mathématique*.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 1 : *BATTEMENTS DE CŒUR*

Pour des raisons de santé, les gens devraient limiter leurs efforts, par exemple durant des activités sportives, afin de ne pas dépasser un certain rythme cardiaque.

Pendant longtemps, la relation entre la fréquence cardiaque maximum recommandée et l'âge de la personne a été décrite par la formule suivante :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 220 – âge

Des recherches récentes ont montré que cette formule devait être légèrement modifiée. La nouvelle formule est :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 208 – (0.7 × âge)

Les items de cette unité PISA s'articulent autour de la différence entre les deux formules et de leur impact sur le calcul de la fréquence cardiaque maximale recommandée.

BATTEMENTS DE CŒUR – *QUESTION 1*

Un article de journal commente : « Une des conséquences de l'utilisation de la nouvelle formule au lieu de l'ancienne est que le nombre maximum recommandé de battements de cœur par minute diminue légèrement pour les jeunes gens et augmente légèrement pour les personnes âgées. »

À partir de quel âge la fréquence cardiaque maximum recommandée commence-t-elle à augmenter, d'après la nouvelle formule ? Montrez votre travail.

....

Ce problème peut être résolu par le biais de la stratégie généralement appliquée par les mathématiciens, que le cadre d'évaluation de la culture mathématique désignera sous le terme de « mathématisation ». On considère que la mathématisation comporte cinq étapes :

- Première étape, le processus de mathématisation commence par un problème relevant de la réalité.

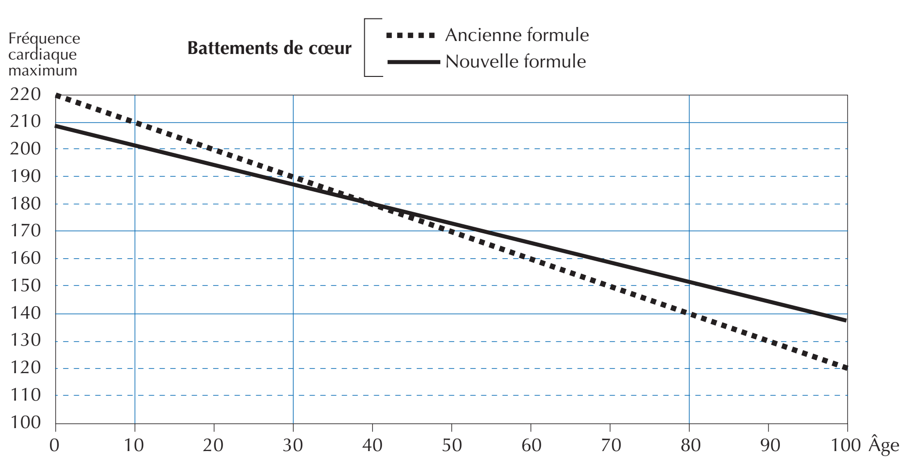
  Comme l'item le montre d'emblée, la réalité du contexte est la santé et la forme physique : « Un principe important de l'exercice physique est de veiller à ne pas aller au-delà de ses forces, car cela peut entraîner des problèmes de santé. » Cet item rappelle ce principe en établissant un lien entre la santé et le rythme cardiaque, et en faisant référence à la « fréquence cardiaque maximum recommandée ».

- Deuxième étape, il faut tenter d'identifier les concepts mathématiques pertinents et réorganiser le problème en conséquence.

  Il apparaît d'emblée qu'il y a deux formules verbales à comprendre et à comparer. L'élève doit en comprendre la véritable signification mathématique. Les deux formules établissent une relation entre la fréquence cardiaque maximum recommandée et l'âge d'une personne.

- Troisième étape, il faut effacer progressivement la réalité.

  Il existe différentes manières de traduire le problème en un problème strictement mathématique. L'une d'entre elles consiste à traduire les formules verbales en expressions algébriques plus formalisées : $y = 220 - x$ ou $y = 208 - 0.7x$, par exemple. L'élève ne doit pas oublier que y représente la fréquence cardiaque maximum par minute et x l'âge en années. Une autre approche strictement mathématique consiste à transposer les deux formules verbales dans un graphique. Les deux tracés sont droits, puisque les formules sont du premier degré. Les tracés des deux formules se coupent, car leur pente est différente.



Ces trois étapes permettent de traduire un problème de la vie réelle en problème mathématique.

- Quatrième étape, il faut résoudre le problème mathématique.

  Dans ce problème mathématique, il faut comparer les deux formules ou les deux tracés dans le graphique et expliquer les différences qui en découlent pour les personnes d'un certain âge. Un bon point de départ pour résoudre ce problème est de trouver pour quel âge les deux formules donnent le même résultat ou d'identifier le point d'intersection entre les deux tracés du graphique. Pour cela, l'élève peut résoudre l'équation suivante : $220 - x = 208 – 0.7x$, qui lui donne comme résultat $x = 40$ et $y = 180$. Donc le point d'intersection des deux tracés a pour coordonnées (40 ; 180).

Ce point peut aussi être trouvé en examinant le graphique ci-dessus : comme la pente de la première formule est -1 et que celle de la seconde est -0.7, l'élève sait que la seconde est « moins forte » que la première. En d'autres termes, la droite d'équation $y = 220 - x$ se situe « au-dessus » de la droite $y = 208 - 0{,}7\ x$ si x est inférieur à 40, et « en dessous » si x est supérieur à 40.

- Cinquième étape, il faut répondre à la question de savoir ce que signifie cette solution strictement mathématique dans le monde réel.

  Cette solution n'est pas trop difficile à interpréter s'il est clair pour l'élève que x est l'âge de la personne considérée et que y est la fréquence cardiaque maximum. Les deux formules aboutissent au même résultat si la personne considérée est âgée de 40 ans : la fréquence cardiaque maximum est égale à 180. Selon l'ancienne formule, la fréquence cardiaque maximum est plus élevée pour les personnes plus jeunes : elle est égale à 220 à un extrême, si l'âge est égal à 0, contre 208 seulement selon la nouvelle formule. Pour les personnes plus âgées, en revanche, soit celles de plus de 40 ans, la fréquence cardiaque maximum est plus élevée. À un extrême, à l'âge de 100 ans, elle est de 120 selon l'ancienne formule et de 138 selon la nouvelle formule. Il faut naturellement tenir compte d'un certain nombre d'autres éléments : les formules manquent de précision mathématique et donnent l'impression de ne pas être véritablement scientifiques. En fait, ces formules ne fournissent qu'une règle générale, qu'il convient d'appliquer avec prudence. De surcroît, une plus grande prudence encore est de mise concernant les résultats des formules aux âges extrêmes.

Cet item montre que même les questions qui semblent relativement « simples », dans le sens où elles peuvent être posées aux élèves dans le respect des contraintes d'une enquête internationale à grande échelle et peuvent être résolues assez vite, permettent cependant d'identifier le cycle complet de la mathématisation et de la résolution de problèmes.

Ce sont ces processus qui définissent au sens large la manière dont les mathématiciens font des mathématiques, dont les gens utilisent les mathématiques dans une série d'activités, réelles ou potentielles, et dont les citoyens informés et réfléchis devraient appliquer les mathématiques pour s'engager pleinement et de manière compétente dans les activités du monde réel. En fait, l'apprentissage du processus de mathématisation devrait être un objectif pédagogique majeur pour tous les élèves.

Tous les pays doivent aujourd'hui, ou devront dans un avenir proche, pouvoir s'appuyer sur des citoyens mathématiquement cultivés, à même d'affronter la grande complexité et le caractère très évolutif de la société. À l'heure où le volume d'informations disponibles augmente de manière exponentielle, les citoyens doivent être en mesure de décider comment traiter ces montagnes de données. Dans les débats de société, il est fait appel de plus en plus souvent à des informations quantitatives pour étayer des argumentations. Il faut souvent posséder une culture mathématique pour poser des jugements et évaluer l'exactitude des conclusions et des allégations des enquêtes et des études. Pouvoir juger du bien-fondé des assertions découlant de ce type d'arguments est – et deviendra de plus en plus – une composante cruciale du profil de citoyen responsable. Les étapes du processus de mathématisation présentées dans ce cadre d'évaluation sont les éléments fondamentaux de l'utilisation des mathématiques dans des situations aussi complexes. Les conséquences d'une incapacité à mettre en œuvre des notions mathématiques peuvent être graves : confusion dans la prise de décisions personnelles, vulnérabilité aux thèses pseudo-scientifiques et prise de décisions non fondées dans la vie publique ou professionnelle.

Les citoyens mathématiquement cultivés sont conscients du rythme rapide des évolutions et, dès lors, comprennent la nécessité d'être ouverts à l'apprentissage tout au long de la vie. S'adapter à ces changements avec souplesse et d'une manière créative et pratique est indispensable à une citoyenneté réussie. Les seules compétences enseignées à l'école ne suffiront probablement pas pour permettre aux citoyens de répondre à leurs besoins au cours de la plus grande partie de leur vie d'adulte.

Le monde du travail pose des exigences similaires en matière de citoyenneté compétente et réfléchie. On attend de moins en moins des travailleurs qu'ils reproduisent les mêmes tâches physiques répétitives. Désormais, ils participent activement au contrôle de la production générée par des machines à la pointe de la technologie, traitent un flot continu d'informations et prennent part à des processus de résolution de problèmes en équipe. De plus en plus de professions requerront à l'avenir la faculté de comprendre, de communiquer, d'utiliser et d'expliquer des concepts et des procédures faisant appel à la pensée mathématique – un mode de pensée dont les diverses étapes du processus de mathématisation sont les fondements.

Enfin, les citoyens mathématiquement cultivés tendent aussi à apprécier les mathématiques et à considérer qu'il s'agit d'une discipline dynamique, évolutive et utile, qu'ils peuvent souvent mettre à profit pour satisfaire leurs besoins.

Le défi opérationnel de l'enquête PISA consiste à évaluer la culture mathématique des élèves de 15 ans en termes de capacité à mathématiser. Cela n'est guère aisé à réaliser dans le cadre d'un test minuté, car la plupart des situations réelles complexes requièrent un temps considérable de traitement (collaborer, trouver les ressources appropriées) pour effectuer les allers-retours nécessaires entre réalité et mathématiques.

Pour illustrer la mathématisation dans le cadre d'un exercice complexe de résolution de problèmes, considérons l'exemple suivant, en l'occurrence l'unité *VACANCES*, de la batterie d'items de résolutions de problèmes du cycle PISA 2003. Deux questions y sont posées aux élèves : ils doivent, d'une part, préparer un itinéraire et, d'autre part, trouver où passer la nuit pendant les vacances, avec à leur disposition, une carte simplifiée et un graphique (représentations multiples) indiquant les distances entre les villes mentionnées sur la carte.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 2 : *VACANCES*

Dans ce problème, il s'agit de déterminer le meilleur itinéraire de vacances.

Les figures A et B présentent une carte de la région et les distances entre les villes.

Figure A. **Carte des routes d'une ville à l'autre**

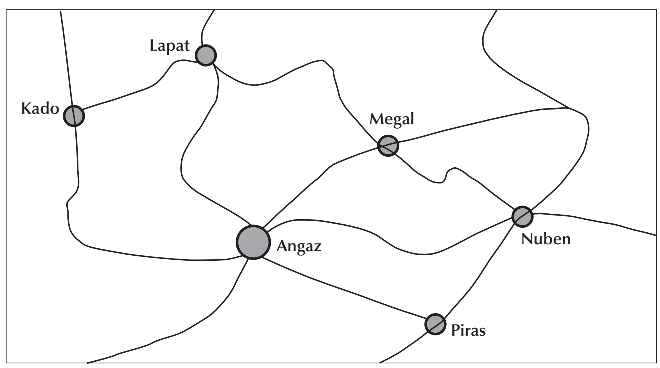


Figure B. **Distances routières les plus courtes entre les villes, exprimées en kilomètres**

Angaz						
Kado	550					
Lapat	500	300				
Megal	300	850	550			
Nuben	500		1000	450		
Piras	300	850	800	600	250	
	Angaz	Kado	Lapat	Megal	Nuben	Piras

VACANCES – *QUESTION 1*

Calculez la plus courte distance par route entre Nuben et Kado.

Distance : .... kilomètres.

VACANCES – *QUESTION 2*

Zoé habite à Angaz. Elle veut visiter Kado et Lapat. Elle ne peut pas faire plus de 300 kilomètres par jour, mais elle peut couper ses trajets en campant, pour la nuit, n'importe où entre les deux villes.

Zoé restera deux nuits dans chaque ville, de manière à pouvoir passer chaque fois une journée entière à les visiter.

Donnez l'itinéraire de Zoé en remplissant le tableau ci-dessous pour indiquer où elle passera chacune des nuits.

....

Jour	Logement pour la nuit
1	Camping entre Angaz et Kado
2	
3	
4	
5	
6	
7	Angaz

Il n'y a pas de lien direct avec une matière scolaire, mais la relation avec les mathématiques discrètes est claire. La stratégie à adopter pour résoudre ce problème n'est pas non plus décrite au préalable. Il est fréquent que les élèves sachent exactement quelle stratégie appliquer lorsqu'on leur donne un exercice de résolution de problème en classe. Il n'en va pas de même dans les problèmes du monde réel, car il n'existe pas de stratégie courante à adopter pour les résoudre.

Cet exemple a aussi le mérite d'exposer les cinq aspects de la mathématisation. Le problème se situe dans la réalité, il peut être structuré en fonction de concepts mathématiques (tableau de distances) et de cartes (des modèles de la réalité). De plus, pour le résoudre, les élèves doivent ignorer les informations redondantes et se concentrer sur celles qui sont pertinentes et, en particulier, sur leurs aspects mathématiques. Enfin, une fois le problème résolu en termes mathématiques, ils doivent réfléchir à la solution en référence à la situation réelle.

Bien que les élèves aient relativement peu d'éléments à lire, le problème est assez complexe, car ils doivent lire et interpréter les informations contenues dans la carte et le tableau des distances. Pour localiser certaines distances, ils doivent lire les données en commençant par le bas du tableau ou parfois par sa partie gauche. Par exemple, pour trouver la distance entre Nuben et Piras, ils doivent modifier leur recherche et chercher la distance de Piras à Nuben (OCDE, 2004).

La deuxième question présente une série de contraintes dont les élèves doivent tenir compte en même temps : parcourir un maximum de 300 kilomètres par jour, prendre comme point de départ et d'arrivée la ville d'Angaz où habite Zoé, visiter Kado et Lapat, et enfin, loger deux nuits dans chacune de ces villes pour respecter l'objectif du voyage.

Il convient de souligner que les épreuves PISA de résolution de problèmes, dont cette unité provient, laissent beaucoup plus de temps aux élèves pour répondre que les épreuves de mathématiques, dont les items sont généralement plus courts.

Idéalement, pour déterminer si des élèves de 15 ans sont en mesure d'exploiter leurs acquis mathématiques pour résoudre les problèmes mathématiques qu'ils rencontrent dans le monde qui les entoure, il faudrait pouvoir recueillir des informations sur leur capacité à mathématiser un certain nombre de situations complexes de ce genre. Comme cette approche n'est pas applicable en pratique, la stratégie retenue dans l'enquête PISA consiste à élaborer des items qui permettent d'évaluer différents aspects de ce processus. La section suivante décrit la stratégie choisie pour créer une batterie équilibrée d'items, conçue de manière à ce que l'échantillon d'items sélectionné couvre les cinq aspects de la mathématisation et que les réponses à ces items puissent être utilisées pour situer les élèves sur une échelle PISA de compétence en mathématiques.

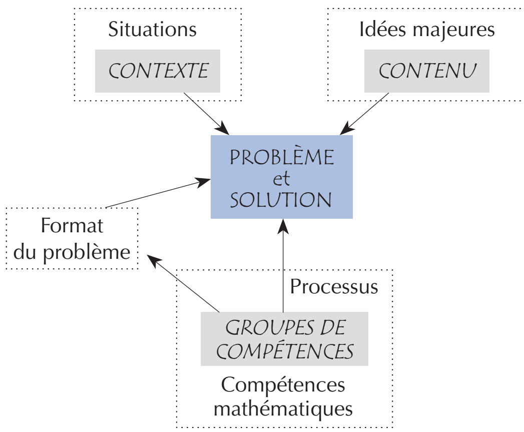
ORGANISATION DU DOMAINE

Le cadre d'évaluation PISA de la *culture mathématique* définit les fondements théoriques des épreuves administrées pour déterminer dans quelle mesure les élèves de 15 ans sont capables d'utiliser les mathématiques à bon escient lorsqu'ils doivent affronter des problèmes de la vie réelle ou, plus généralement, à quel point ils sont mathématiquement cultivés. Pour décrire ce domaine d'évaluation plus clairement, il y a lieu de distinguer trois composantes :

- les *situations ou contextes* où se placent les problèmes à résoudre ;
- les *contenus mathématiques* à utiliser pour résoudre les problèmes, qui s'articulent autour d'un certain nombre d'idées majeures ; et
- les *compétences mathématiques* à activer pour mettre en relation le monde réel dans lequel les problèmes s'inscrivent et les mathématiques, et donc résoudre ces problèmes.

La figure 2.1 présente ces trois composantes, qui sont décrites en détail ci-dessous.

■ Figure 2.1 ■
Les composantes du domaine PISA de mathématiques



La *culture mathématique* d'un individu se reflète, par exemple, dans la manière dont il utilise ses connaissances et compétences mathématiques pour résoudre des problèmes. Les problèmes (et leurs solutions) peuvent se présenter dans des situations et des contextes très divers lors des expériences vécues par l'individu. Les problèmes PISA s'inspirent du monde réel à deux égards. En premier lieu, ils s'inscrivent dans des situations générales qui sont pertinentes par rapport à la vie des élèves. Ces situations font partie du monde réel et sont représentées dans le grand encadré dans le coin supérieur gauche de la figure 2.1. Dans chacune de ces situations, les problèmes ont un contexte plus spécifique. Ces contextes sont représentés en grisé à l'intérieur de l'encadré « Situations ».

Dans les exemples ci-dessus (*BATTEMENTS DE CŒUR* et *VACANCES*), les *situations* relèvent toutes deux de la vie personnelle et les *contextes* sont, d'une part, le sport et la santé des citoyens actifs et, d'autre part, la façon de planifier des vacances.

Pour résoudre des problèmes qui s'inspirent du monde réel tels que ceux-là, un individu doit exploiter sa maîtrise de contenus mathématiques techniques spécifiques. Les connaissances à utiliser pour résoudre de tels problèmes n'apparaissent pas d'emblée, contrairement à ce qui se passe en classe, où le contenu mathématique à l'étude est clairement identifié. Pour résoudre des problèmes, il faut appréhender les phénomènes au travers desquels le problème se manifeste et identifier les connaissances spécifiques susceptibles d'être utiles, puis les activer.

Dans l'enquête PISA, les contenus mathématiques sont identifiés dans un petit nombre d'*idées majeures*, qui représentent les grandes catégories de phénomènes du monde réel qui offrent la possibilité d'explorer et d'utiliser les mathématiques dans les interactions avec le monde. Cette approche suit les grandes tendances du développement historique des mathématiques en tant que discipline et du développement des idées mathématiques chez les individus. On développe également ces quatre grandes catégories pour exposer les objets mathématiques plus spécifiques, les connaissances et les compétences qui entrent en interaction et, ce faisant, montrer les correspondances entre cette façon de caractériser les contenus mathématiques et les notions de mathématiques abordées dans les programmes scolaires.

Les *idées majeures* sont représentées dans le grand cadre situé dans le coin supérieur droit de la figure 2.1. Le contenu mathématique spécifique à utiliser pour résoudre un problème est tiré de ces idées majeures et se situe à l'intérieur de l'encadré des idées majeures.

Les flèches qui partent des encadrés « Contexte » et « Contenu » vers l'encadré « Problème » montrent comment le monde réel (y compris les mathématiques) crée des problèmes.

Le problème de l'unité *BATTEMENTS DE CŒUR* porte sur des relations mathématiques et nécessite la comparaison de deux relations pour prendre des décisions. Il relève donc de l'idée majeure *variations et relations*. Le problème *VACANCES*, qui demande aux élèves d'effectuer des calculs élémentaires, relève de l'idée majeure *quantité*, même si la deuxième question leur impose de se livrer à une certaine forme de raisonnement analytique.

Les compétences mathématiques cognitives désignent les processus qu'appliquent les élèves lorsqu'ils tentent de résoudre des problèmes. Elles englobent les différents processus à mettre en œuvre pour résoudre divers types de problèmes. Les compétences mathématiques spécifiques qui sont définies dans les groupes de compétences reflètent la façon dont les processus mathématiques sont généralement utilisés lorsque les élèves ont à résoudre des problèmes en lien avec le monde dans lequel ils vivent. Elles sont décrites en détail dans les sections suivantes.

La composante « Processus » du cadre d'évaluation de la *culture mathématique* représente les compétences mathématiques générales et se situe dans le grand encadré de la figure 2.1, à l'intérieur duquel se trouve un encadré plus petit avec les trois groupes de compétences. Les processus ou compétences requis pour résoudre un problème spécifique sont liés à la nature du problème et se reflètent dans la solution trouvée par l'élève. Cette interaction est représentée par la flèche allant de l'encadré des processus mathématiques à l'encadré du problème et de sa solution.

La dernière flèche de la figure va de l'encadré « Processus » à l'encadré « Format du problème ». Les processus mathématiques à appliquer pour résoudre un problème dépendent du format du problème et de ses exigences spécifiques.

Il convient de souligner ici que les trois composantes qui viennent d'être décrites (Situations et contextes, Contenus mathématiques, Processus mathématiques) sont de nature différente. En effet, les processus mathématiques sont au cœur même de l'évaluation des compétences en mathématiques, et les élèves ne sont en mesure de résoudre des problèmes que s'ils possèdent des compétences spécifiques. Évaluer la *culture mathématique* consiste notamment à déterminer dans quelle mesure les élèves possèdent des connaissances et des compétences mathématiques, et peuvent les appliquer efficacement dans des situations présentant un problème à résoudre.

Ces trois composantes sont décrites de manière plus détaillée dans les sections suivantes.

Situations et contextes

Pouvoir utiliser les mathématiques ou « faire » des mathématiques dans des situations très diverses est une composante importante de la définition de la *culture mathématique*. Il est établi, en effet, que lorsqu'un individu se trouve face à des problèmes qui se prêtent à un traitement mathématique, les représentations et méthodes mathématiques qu'il choisit dépendent souvent des situations dans lesquelles ces problèmes s'inscrivent.

La situation correspond à l'aspect du monde de l'élève dans lequel les tâches s'inscrivent. La situation se trouve à une certaine distance des élèves. Dans les épreuves PISA, les situations les plus proches des élèves sont celles qui relèvent de leur vie personnelle. Viennent ensuite les situations appartenant à la vie scolaire, puis aux loisirs et au travail, et enfin, à la collectivité locale et à la société. Les situations les plus éloignées des élèves sont celles d'ordre scientifique. Les quatre types de situation définis et utilisés pour les problèmes à résoudre sont celles d'ordre *personnel*, *éducatif/professionnel*, *public* et *scientifique*.

Le contexte d'un item correspond à son cadre spécifique dans une situation. Il est constitué de l'ensemble des détails utilisés pour énoncer le problème.

Considérons l'exemple suivant :

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 3 : *COMPTE D'ÉPARGNE*

COMPTE D'ÉPARGNE – *QUESTION 1*

Un montant de 1 000 zeds est déposé sur un compte d'épargne à la banque. Deux options sont proposées : SOIT un rendement à un taux annuel de 4 %, SOIT une prime immédiate de 10 zeds et un rendement à un taux annuel de 3 %. Quelle est la meilleure option après un an ? Et après deux ans ?

....

Cet item s'inscrit dans une situation d'ordre bancaire et financier, en rapport avec la collectivité locale et la société, classée au sens de l'enquête PISA dans la catégorie des situations « publiques ». L'argent (les zeds) et les taux d'intérêt d'un compte bancaire constituent le contexte de cet item.

Ce type de problème pourrait faire partie de l'expérience vécue par des jeunes dans leur vie courante. Il propose un contexte authentique d'utilisation des mathématiques puisque l'application des mathématiques y est en relation directe avec la résolution du problème, contrairement aux problèmes typiques des manuels scolaires, où l'objectif principal est de faire des exercices de mathématiques et non d'utiliser les mathématiques pour résoudre un problème du monde réel. Cette authenticité de l'utilisation des mathématiques est un aspect important de la conception et de l'analyse des items PISA, en rapport étroit avec la définition de la *culture mathématique*.

Il y a lieu de souligner que l'adjectif « authentique » ne veut pas dire ici que les items de mathématiques sont réels. Ce terme est employé dans la description des épreuves PISA de mathématiques pour indiquer que l'utilisation des mathématiques a véritablement pour but de résoudre les problèmes posés, et non que les problèmes sont soumis aux élèves comme prétexte pour les amener à effectuer des exercices de mathématiques.

Il convient aussi de signaler que certains éléments de ce problème sont imaginaires – la monnaie utilisée, le zed, est fictive. Le choix d'éléments fictifs est motivé par le souci de ne pas avantager injustement les élèves de certains pays.

La situation et le contexte d'un problème peuvent également être définis selon la distance entre le problème et les mathématiques. Si une tâche se réfère uniquement à des objets, des symboles ou des structures mathématiques et n'évoque aucun thème extérieur au monde des mathématiques, son contexte est considéré comme intra-mathématique et est classé dans les situations d'ordre scientifique. Les épreuves PISA contiennent un petit nombre de tâches de ce type, où le lien entre le problème et les mathématiques sous-jacentes est rendu explicite dans le contexte du problème. D'habitude, les problèmes rencontrés dans la vie courante ne se présentent pas en termes mathématiques explicites et se réfèrent à des objets du monde réel. Leur contexte est considéré comme extra-mathématique : c'est l'élève qui doit traduire ces contextes en termes mathématiques. En général, l'enquête PISA privilégie les tâches qui peuvent être rencontrées dans des situations de la vie réelle, qui s'inscrivent dans un contexte authentique donnant lieu à un usage des mathématiques qui est susceptible d'influencer les solutions et leur interprétation. Ceci n'exclut toutefois pas l'inclusion de tâches dont le contexte est imaginaire, pour autant que certains éléments de ce contexte soient réels, que la situation ne soit pas trop éloignée de la vie courante et que la résolution des problèmes passe par une utilisation authentique des mathématiques. L'exemple n° 4 présente un problème dont le contexte, imaginaire, est extra-mathématique.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 4 : *PIÈCES DE MONNAIE*

PIÈCES DE MONNAIE – *QUESTION 1*

Serait-il concevable de mettre en place un système de pièces de monnaie en n'utilisant que les valeurs 3 et 5 ? Plus spécifiquement, quels sont les montants qui pourraient être obtenus sur cette base ? Un tel système serait-il souhaitable ?

....

La qualité de ce problème ne tient pas nécessairement à sa proximité avec le monde réel, mais à sa nature, en l'occurrence, le fait qu'il est intéressant d'un point de vue mathématique et qu'il fait appel à des processus mathématiques en rapport avec la *culture mathématique*. L'un des atouts majeurs de cet exemple est qu'il illustre l'usage des mathématiques pour expliquer des scénarios hypothétiques et explorer des situations ou des systèmes possibles, même s'il est peu probable que ces scénarios et systèmes soient jamais mis en œuvre concrètement. Ce problème est à classer dans la catégorie des situations d'ordre scientifique.

En résumé, les épreuves PISA privilégient les problèmes qui peuvent se rencontrer dans diverses situations de la vie réelle et qui s'inscrivent dans un contexte où l'application des mathématiques pour résoudre le problème est authentique. Les problèmes dont les contextes extra-mathématiques influencent les solutions et leur interprétation sont ceux qui servent le mieux les objectifs d'une évaluation de la *culture mathématique* puisque ce sont ceux que l'on rencontre le plus couramment dans la vie de tous les jours.

Contenu mathématique : les quatre idées majeures

Les concepts, structures et notions mathématiques ont été inventés pour comprendre, organiser et analyser les phénomènes de la nature et du monde social et mental. À l'école, les cours de mathématiques s'articulent en toute logique autour des matières (arithmétique, algèbre, géométrie, etc.) et de leurs sujets spécifiques qui reflètent des branches historiquement bien établies de la pensée mathématique et qui facilitent la conception d'un syllabus pédagogique bien structuré. Toutefois, dans le monde réel, les phénomènes qui se prêtent à un traitement mathématique ne se présentent pas sous une forme organisée de façon aussi logique. Rares sont les phénomènes qui se manifestent dans des conditions telles qu'elles permettent de les comprendre et de les résoudre moyennant l'application de connaissances relevant d'une seule matière. Résoudre les problèmes tels qu'ils se présentent dans la vie réelle passe par des processus de réflexion plus divers que ceux généralement utilisés en classe.

Comme l'objectif de l'enquête PISA est d'évaluer la capacité des élèves à résoudre des problèmes, la stratégie qui a été retenue a consisté à définir l'éventail de contenus à intégrer dans les épreuves selon une approche phénoménologique

de description des concepts, structures ou idées mathématiques : les contenus sont décrits par rapport aux phénomènes et aux types de problèmes pour lesquels ils ont été créés. Grâce à cette approche, les épreuves sont en adéquation avec la définition du domaine d'évaluation, tout en proposant une série de contenus, dont ceux habituellement retenus dans d'autres épreuves de mathématiques et inscrits dans les cursus nationaux de mathématiques.

L'organisation phénoménologique du contenu mathématique n'a rien de neuf. Deux ouvrages réputés, *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990) et *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994), décrivent les mathématiques de cette manière. Divers termes et classifications sont employés dans ces ouvrages et dans d'autres publications similaires. Une sélection s'impose : quatre idées majeures ont donc été choisies dans le cadre de l'enquête PISA. Ces idées majeures retenues dans les épreuves PISA montrent que les mathématiques sont considérées comme la science des structures. Les structures présentes dans les idées majeures « *Quantité* », « *Espace et formes* » et « *Variations et relations* », sont des concepts centraux et essentiels de toute description de mathématiques, et au cœur de tout programme d'enseignement, que ce soit dans le deuxième cycle de l'enseignement secondaire ou dans l'enseignement tertiaire (universitaire ou plus pratique). Toutefois, savoir aborder l'incertitude dans une perspective mathématique et scientifique est de plus en plus considéré comme essentiel. C'est la raison pour laquelle des éléments de la théorie des probabilités et des statistiques ont été retenus à titre de quatrième idée majeure, à savoir « *Incertitude* ».

Cette approche se différencie de celle adoptée pour le choix des contenus d'enseignement des mathématiques et des notions généralement inscrites dans les programmes scolaires, mais les idées majeures englobent l'ensemble des concepts de mathématiques que les élèves sont censés avoir appris durant leurs études.

Les idées majeures suivantes ont été retenues dans l'enquête PISA dans le souci de suivre le développement historique des mathématiques, de couvrir le domaine d'évaluation comme l'exige sa définition et de refléter les grandes lignes des cursus :

- l'espace et les formes ;
- les variations et les relations ;
- la quantité ; et
- l'incertitude.

Ces quatre idées majeures permettent d'organiser le contenu mathématique de sorte que les aspects sont en nombre suffisant pour assurer une bonne répartition des items sur l'ensemble du cursus de mathématiques, mais assez ciblés pour faciliter la présentation de problèmes dans des situations réelles.

La notion d'idées majeures est, fondamentalement, celle d'un ensemble de phénomènes et de concepts dont se dégage un sens commun et que l'on peut rencontrer dans une multitude de situations différentes. Chaque idée majeure peut être perçue comme une sorte de notion globale en rapport avec une dimension générale de contenu. Cela implique que les idées majeures ne peuvent être strictement isolées les unes des autres, pas plus que ne peuvent l'être les diverses branches des mathématiques classiques. Chacune d'entre elles représente plutôt une perspective, un point de vue propre, avec en quelque sorte un noyau ou centre de gravité et des contours flous autorisant le chevauchement avec d'autres idées majeures. En principe, toute idée majeure en chevauche une autre. Les quatre idées majeures sont décrites ci-après.

Espace et formes

Les régularités de structure sont omniprésentes autour de nous : dans le langage, la musique, les vidéos, la circulation, les immeubles et l'art. Les formes peuvent être considérées comme des structures : maisons, immeubles de bureau, ponts, étoiles de mer, flocons de neige, plans de ville, feuilles de trèfle, cristaux, ombres, etc. Les structures géométriques peuvent servir de modèles relativement simples pour quantité de phénomènes, et leur étude est possible et souhaitable à tous les niveaux (Grünbaum, 1985).

Il est important d'être capable de comprendre les propriétés des objets et leurs positions relatives. Les élèves doivent être conscients de la manière dont ils voient les choses et doivent apprendre à s'orienter dans l'espace, dans les constructions et dans les formes. Cela implique de comprendre la relation entre les formes, d'une part, et leurs images ou représentations visuelles, d'autre part, par exemple entre une ville et les photos ou les plans qui la représentent. Il faut aussi comprendre comment des objets en trois dimensions peuvent être représentés en deux dimensions, comment les ombres se forment et s'interprètent, ou encore ce qu'est une perspective et comment elle fonctionne.

La notion de forme est en rapport étroit avec la géométrie classique, mais elle va bien au-delà de cette discipline en termes de contenu, de signification et de méthode. Pour entrer en interaction avec des formes réelles, il faut comprendre le monde visuel et sa description, et savoir encoder et décoder des informations visuelles. Cela veut dire aussi interpréter des informations visuelles. Pour appréhender le concept de forme, les élèves doivent être capables de découvrir en quoi des objets sont semblables et dissemblables, d'analyser les divers composants des objets, et de reconnaître des formes sous des représentations et dans des dimensions différentes.

Il convient de souligner que les formes ne sont pas uniquement des entités statiques. Elles peuvent être transformées, modifiées ou même visualisées avec beaucoup d'élégance grâce à l'informatique. Les élèves doivent être à même d'identifier les structures ou les régularités au fur et à mesure que les formes changent. La figure 2.2 en donne un exemple dans la section suivante.

L'étude des formes et des constructions passe par la recherche de similitudes et de différences lors de l'analyse des composantes de la forme et la reconnaissance des formes sous des représentations et dans des dimensions différentes. L'étude des formes est étroitement liée à la compréhension de l'espace (Freudenthal, 1973).

Les exemples dans lesquels cette forme de pensée intervient sont innombrables : identifier et mettre en relation une photo d'une ville et le plan de la même ville ; localiser l'endroit où la photo a été prise ; dessiner un plan ; comprendre pourquoi un immeuble proche paraît plus grand qu'un immeuble éloigné, pourquoi les rails de chemin de fer semblent se rejoindre à l'horizon ; etc. Tous ces exemples sont pertinents pour les élèves dans le cadre de l'idée majeure *Espace et formes*.

Comme les élèves vivent dans un espace en trois dimensions, les vues d'objets selon trois aspects orthogonaux (vue de face, de profil et de dessus, par exemple) doivent leur être familières. Ils doivent être conscients de la valeur et des limites des différentes représentations de formes tridimensionnelles, comme dans l'exemple proposé dans la figure 2.3. Ils doivent non seulement comprendre la position relative des objets, mais également savoir comment s'orienter dans l'espace, parmi des constructions et des formes. Ils doivent, par exemple, être capables de lire un plan et de donner l'itinéraire à suivre pour se rendre du point A au point B, que ce soit avec des coordonnées, en langage courant ou à l'aide d'un croquis.

La compréhension du concept de formes requiert aussi la faculté de représenter en deux dimensions un objet tridimensionnel, et inversement, même si l'objet tridimensionnel est représenté en deux dimensions. La figure 2.4 en donne un exemple.

Les aspects principaux de l'idée majeure *Espace et formes* sont les suivants :

- reconnaître des formes et des récurrences dans des formes ;
- décrire, encoder et décoder des informations visuelles ;
- comprendre les changements dynamiques des formes ;
- identifier des similitudes et des différences ;
- identifier des positions relatives ;
- interpréter des représentations en deux et trois dimensions, et les relations qui existent entre elles ; et
- s'orienter dans l'espace.

***Exemples illustrant l'idée majeure* Espace et formes**

La figure 2.2 montre, par un exemple simple, que la visualisation de formes qui changent exige une certaine souplesse d'esprit. Il s'agit en l'occurrence d'un cube qui a subi diverses coupes planes, au sujet duquel de nombreuses questions peuvent être posées, dont les suivantes :

Quelles sont les formes qui peuvent être produites par une seule coupe plane ?

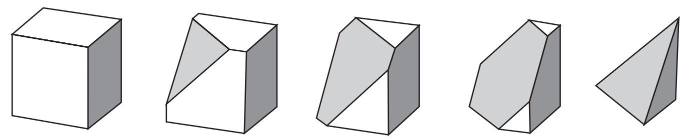
....

Combien de faces, arêtes et sommets obtient-on si le cube est ainsi sectionné ?

....

■ Figure 2.2 ■

Coupes planes d'un cube

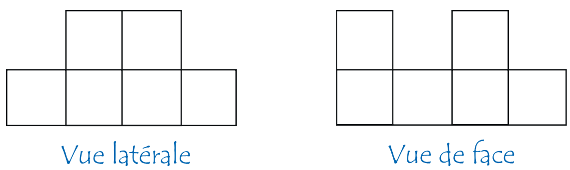


Trois exemples illustrant la nécessité pour les élèves d'être familiarisés avec les représentations de formes tridimensionnelles sont proposés ci-dessous. Dans le premier exemple, à la figure 2.3, la question suivante est posée à propos de la vue de face et de la vue de profil :

Combien de cubes a-t-il fallu pour créer cet objet ?

■ Figure 2.3 ■

Vue de face et vue de profil d'un objet constitué de cubes

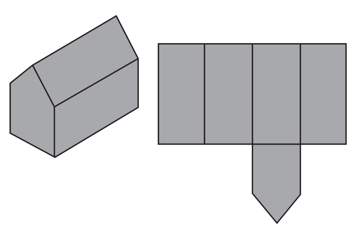


Il peut être surprenant – tant pour les élèves que pour les enseignants – de constater que le nombre de cubes est de 20 maximum et de 6 minimum (de Lange, 1995).

Dans l'exemple suivant, une grange est représentée en deux dimensions et accompagnée d'un plan incomplet. Le problème consiste à compléter le plan de la grange.

■ Figure 2.4 ■

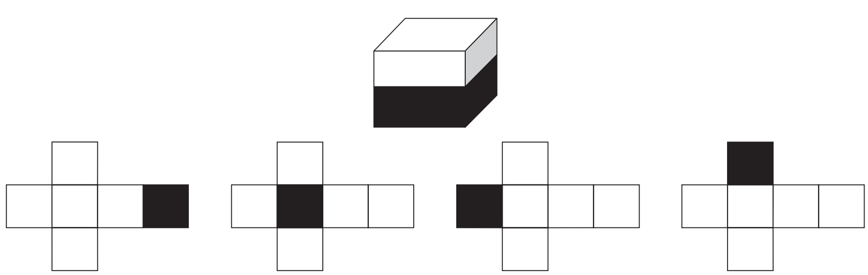
Représentation bidimensionnelle d'une grange tridimensionnelle et son développement (incomplet)



Le dernier exemple, proche du précédent, est présenté dans la figure 2.5 ci-dessous (adaptation de Hershkovitz *et al.*, 1996).

■ Figure 2.5 ■

Cube à fond noir



La moitié inférieure du cube a été peinte en noir. La face inférieure est déjà de couleur noire sur les quatre développements. On peut, par exemple, demander aux élèves de finir de noircir les parties appropriées des cases dans chaque développement.

Variations et relations

Tout phénomène naturel est la manifestation d'une variation, et le monde autour de nous nous permet d'observer quantité de relations provisoires ou permanentes entre phénomènes. À titre d'exemple, citons : les organismes qui changent en grandissant ; le cycle des saisons ; le flux et le reflux des marées ; la fluctuation du chômage ; les changements météorologiques ; et l'évolution des indices boursiers. Certains de ces processus de variation peuvent être décrits ou modélisés par des fonctions mathématiques simples : des fonctions linéaires, exponentielles, périodiques ou logistiques, qu'elles soient discrètes ou continues. Toutefois, de nombreux processus relèvent de catégories différentes, et l'analyse des données est souvent essentielle pour identifier le type de relation. Les relations mathématiques se présentent souvent sous la forme d'équations et d'inégalités, mais des relations d'une nature plus générale (l'équivalence, la divisibilité et l'inclusion, pour n'en citer que quelques-unes) sont également susceptibles d'apparaître.

Pour être sensible aux régularités des variations, Stewart (1990) recommande ce qui suit :

- représenter les changements sous une forme compréhensible ;
- comprendre les types fondamentaux de variation ;
- reconnaître des types particuliers de variation lors de leur manifestation ;
- appliquer ces techniques au monde extérieur ; et
- maîtriser un monde changeant, au mieux de ses intérêts.

Les *variations* et les *relations* peuvent être représentées visuellement de plusieurs façons : sous forme numérique (par exemple, sous forme de tableau), symbolique, graphique, algébrique ou géométrique. Pouvoir passer d'une représentation d'une forme à une autre est d'une importance capitale, tout comme pouvoir identifier et comprendre les relations et les types de variations fondamentaux. Les élèves devraient maîtriser les notions de croissance linéaire (processus additif), de croissance exponentielle (processus multiplicatif), de croissance périodique et de croissance logistique (au moins de manière informelle, comme cas particulier de la croissance exponentielle).

Les élèves devraient aussi pouvoir identifier les relations entre ces modèles, c'est-à-dire trouver les différences majeures entre les processus linéaires et les processus exponentiels et savoir que la progression en pourcentage est une forme de croissance exponentielle ou comprendre pourquoi et comment la croissance logistique intervient, que ce soit en situation continue ou discrète.

Les variations interviennent lorsque les éléments s'influencent les uns les autres, dans un système où les phénomènes ou les objets sont interdépendants. Dans les exemples de la synthèse ci-dessus, tous les phénomènes changent au fil du temps, mais la vie réelle fournit de nombreux exemples dans lesquels les objets sont reliés entre eux de bien d'autres façons. Par exemple :

> Si la longueur d'une corde de guitare est réduite de moitié, la nouvelle tonalité est supérieure d'une octave à la tonalité originale. La tonalité dépend donc de la longueur de la corde.
>
> Lorsque nous déposons de l'argent sur un compte bancaire, nous savons que le solde du compte dépendra de l'importance, de la fréquence et du nombre de dépôts et de retraits, ainsi que des taux d'intérêt.

Les relations conduisent à la notion de dépendance. Il y a dépendance lorsque les propriétés et les variations de certains objets mathématiques peuvent influencer les propriétés et les variations d'autres objets mathématiques ou dépendre d'elles. Les relations mathématiques prennent souvent la forme d'équations ou d'inégalités, mais des relations d'ordre plus général peuvent également se rencontrer.

L'idée majeure *Variations et relations* fait appel au raisonnement fonctionnel. Le raisonnement fonctionnel – qui consiste à réfléchir en termes de relations – est l'un des objectifs les plus fondamentaux de l'enseignement des mathématiques (MAA, 1923). Pour les élèves de 15 ans, cela implique de comprendre la notion de taux de variation, de gradient et de pente (pas nécessairement selon une approche formelle, cependant), ainsi que le concept de dépendance d'une variable par rapport à une autre. Ils doivent être capables aussi de juger de la vitesse à laquelle les processus se déroulent, y compris en termes relatifs.

L'idée majeure *Variations et relations* est étroitement liée à des aspects relevant d'autres idées majeures. L'étude des régularités dans le domaine des nombres peut mener à la découverte de relations surprenantes, telles que les nombres de Fibonacci ou le nombre d'or. Le concept de nombre d'or intervient en géométrie aussi, et est donc étroitement lié à l'idée majeure *Espace et formes*. Beaucoup d'autres exemples de *variations* et de *relations* se rencontrent également dans le domaine de l'*espace* et des *formes*, par exemple l'accroissement d'une surface en fonction de l'augmentation du périmètre ou du diamètre. La géométrie euclidienne se prête aussi à l'étude des relations. La relation entre les trois côtés d'un triangle en est un exemple bien connu. Si la longueur de deux côtés est connue, la longueur du troisième n'est pas déterminée, mais l'intervalle dans lequel elle se situe est connu : les deux extrémités de l'intervalle correspondent respectivement à la valeur absolue de la différence entre les deux autres côtés et à leur somme. Plusieurs autres relations similaires existent pour les divers éléments d'un triangle.

Divers problèmes relevant de l'idée majeure *Incertitude* peuvent être considérés sous l'angle des *variations* et des *relations*. Si un joueur lance deux dés et obtient un quatre avec l'un des dés, quelle est la probabilité que la somme des deux dés soit supérieure à 7 ? La réponse (50 %) dépend de la proportion de résultats potentiellement favorables par rapport à l'ensemble des résultats possibles, ce qui constitue une dépendance fonctionnelle.

***Exemples illustrant l'idée majeure* Variations et relations**

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 5 : *EXCURSION SCOLAIRE*

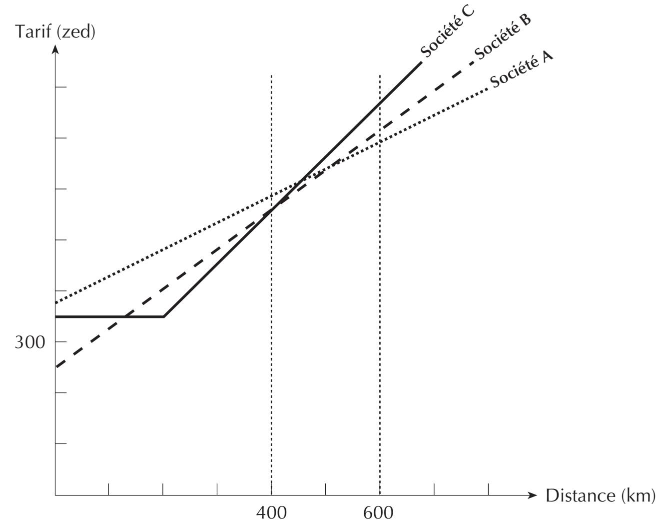
> Une école souhaite louer un autocar pour organiser une excursion et demande des informations sur les tarifs à trois sociétés de transport.
>
> La société A propose un montant forfaitaire de 375 zeds, augmenté de 0.5 zed par kilomètre parcouru. La société B propose un tarif forfaitaire de 250 zeds, augmenté de 0.75 zed par kilomètre parcouru. La société C pratique un tarif unique de 350 zeds jusqu'à 200 kilomètres, plus un montant de 1.02 zed par kilomètre parcouru au-delà des 200 premiers kilomètres.
>
> Quelle société l'école doit-elle choisir si la distance totale qui sera parcourue au cours de l'excursion est comprise entre 400 et 600 kilomètres ?

Abstraction faite des éléments fictifs du contexte, ce problème est susceptible de se présenter dans la vie courante. Pour trouver sa solution, il faut formuler et résoudre plusieurs équations, inéquations et relations fonctionnelles. Il peut être abordé soit par des moyens graphiques, soit par des moyens algébriques, voire par la combinaison des deux. Le fait que la distance totale à parcourir lors de l'excursion ne soit pas indiquée avec précision introduit en outre des liens avec l'idée majeure *Incertitude*, décrite ci-après.

Ce problème est présenté sous forme graphique dans la figure 2.6.

■ Figure 2.6 ■

Tarifs pratiqués par les trois sociétés de transport



L'exemple suivant a lui aussi trait aux *Variations et relations*.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 6 : *PROLIFÉRATION CELLULAIRE*

Des médecins surveillent la multiplication de cellules. Ils s'intéressent plus particulièrement au moment où leur nombre atteindra 60 000, car c'est à ce moment-là qu'ils devront entamer une expérience. Le tableau des résultats est le suivant :

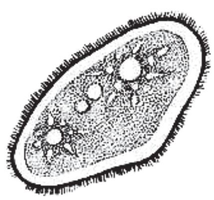
Temps (jours)	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Cellules	597	893	1 339	1 995	2 976	4 434	6 606	9 878	14 719	21 956	32 763

PROLIFÉRATION CELLULAIRE – *QUESTION 1*

À quel moment les cellules seront-elles au nombre de 60 000 ? ....

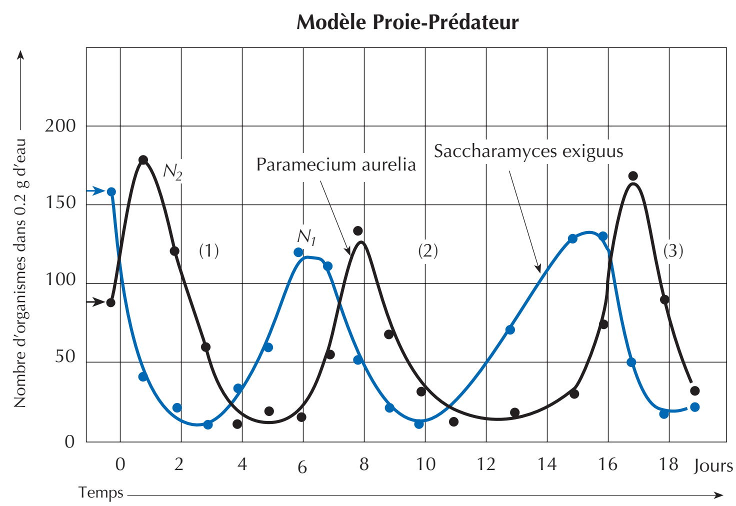
MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 7 : *PROIE-PRÉDATEUR*

Le graphique suivant montre la croissance de deux organismes vivants : la paramécie et les saccharomyces.



Paramecium

Saccharomyces



L'un des deux organismes (le prédateur) mange l'autre (la proie). Sur la base du graphique, pouvez-vous déterminer lequel est la proie et lequel est le prédateur ?

L'une des propriétés des phénomènes « proie-prédateur » s'énonce comme suit : le taux de croissance des prédateurs est proportionnel au nombre de proies disponibles. Cette propriété s'applique-t-elle au graphique ci-dessus ?

Quantité

Parmi les aspects importants de l'idée majeure *Quantité*, citons ceux qui consistent à appréhender des grandeurs relatives, à reconnaître des récurrences numériques et à utiliser des nombres pour représenter des quantités et des attributs quantifiables des objets du monde réel (comptage et mesure). En relèvent également les processus qui consistent à traiter et comprendre des nombres représentés sous des formes différentes.

Le raisonnement quantitatif est un autre aspect important de l'idée majeure *Quantité*. Pour se livrer à un tel raisonnement, il faut posséder des facultés essentielles : avoir le sens des nombres, pouvoir représenter des nombres sous diverses formes, comprendre la signification des opérations, « sentir » l'ordre de grandeur des nombres, savoir ce qu'est un calcul mathématiquement élégant et pouvoir effectuer des estimations et des calculs mentaux.

L'un des usages les plus importants et les plus fréquents des nombres dans la vie courante consiste à mesurer des grandeurs : longueur, surface, volume, hauteur, vitesse, masse, pression atmosphérique et valeur monétaire sont autant de dimensions quantifiées à l'aide de mesures.

Comprendre le « sens des opérations », implique notamment la capacité à exécuter des opérations impliquant des comparaisons, des proportions et des pourcentages. Quant au « sens des nombres », il fait référence aux notions de grandeurs relatives, de représentations multiples des nombres et de formes équivalentes des nombres, et renvoie à la faculté d'utiliser la compréhension de ces aspects pour décrire des caractéristiques du monde.

La maîtrise de l'idée majeure *Quantité* implique un « sens » des quantités et de l'estimation. Pour être à même de juger de la vraisemblance de résultats numériques, l'individu doit avoir une connaissance assez vaste des quantités (mesures) dans le monde réel. La vitesse moyenne d'une voiture est-elle de 5, 50 ou 500 km/h ? La population mondiale est-elle de l'ordre de 6 millions, 600 millions, 6 milliards ou 60 milliards d'habitants ? Quelle est la hauteur d'une tour ? Quelle est la largeur d'une rivière ? Pouvoir donner rapidement un ordre de grandeur est particulièrement important, d'autant plus que l'utilisation des instruments électroniques de calcul se généralise. Un individu doit savoir, par exemple, que le résultat de l'opération 33 x 613 approche 20 000. L'acquisition de cette faculté ne passe pas par des exercices intensifs d'exécution mentale d'algorithmes qui s'effectuent habituellement par écrit, mais par l'application souple et intelligente de connaissances sur les valeurs de position des nombres et l'arithmétique à un chiffre (Fey, 1990).

En se servant à bon escient de leur sens des nombres, les élèves peuvent résoudre des problèmes qui nécessitent un raisonnement direct, inverse ou proportionnel. Ils sont capables d'estimer des taux de variation ou de trouver des arguments pour sélectionner les données à prendre en compte et le niveau de précision requis par les opérations et les modèles qu'ils appliquent. Ils peuvent aussi analyser plusieurs algorithmes possibles et expliquer pourquoi ils sont probants ou dans quels cas ils ne fonctionnent pas. Ils peuvent concevoir des modèles impliquant des opérations et des relations entre opérations pour résoudre des problèmes comportant des données issues du monde réel et pour établir des relations numériques nécessitant des opérations et des comparaisons (Dossey, 1997).

L'idée majeure *Quantité* renvoie aussi à l'« élégance » du raisonnement quantitatif, comme celui utilisé par Gauss dans l'exemple suivant. La créativité, associée à la compréhension des concepts en jeu, devrait être valorisée dans les cursus des élèves de 15 ans.

***Exemples illustrant l'idée majeure* Quantité**

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 8 : *GAUSS*

Un jour, l'instituteur de Karl Friedrich Gauss (1777-1855) demanda à ses élèves d'additionner tous les nombres de 1 à 100, probablement dans l'intention de les occuper pendant un certain temps. Mais Gauss, qui excellait dans l'art du raisonnement quantitatif, découvrit un raccourci. Voici son raisonnement.

Vous écrivez la somme à deux reprises, la première dans l'ordre croissant et la seconde dans l'ordre décroissant, comme ceci.

1 + 2 + 3 + …………. + 98 + 99 + 100

100 + 99 + 98 +…………+ 3 + 2 + 1

Vous additionnez ensuite les deux sommes, colonne par colonne, pour obtenir :

101 + 101 +……………….+ 101 + 101

Comme il y a exactement 100 répétitions du nombre 101 dans cette somme, sa valeur est :

100 x 101 = 10 100

Puisque ce produit est égal au double de la somme originale, il suffit de diviser par deux pour obtenir le résultat : 5 050.

Nombres triangulaires

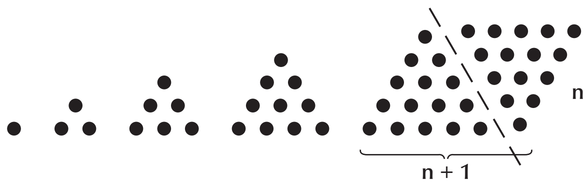
Nous pouvons étendre cet exemple de pensée quantitative impliquant des récurrences de nombres pour montrer le lien avec la représentation géométrique de ces récurrences. La formule suivante décrit la situation générale du problème de Gauss.

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$

Cette formule décrit également une récurrence géométrique bien connue : les nombres de forme n(n+1)/2 sont dits triangulaires, car ce sont précisément les nombres qui peuvent être obtenus lorsque des boules sont disposées dans un triangle équilatéral.

Les cinq premiers nombres triangulaires 1, 3, 6, 10 et 15 sont présentés dans la figure 2.7 ci-dessous.

■ Figure 2.7 ■
Les cinq premiers nombres triangulaires



Raisonnement proportionnel

Il sera intéressant d'observer la manière dont les élèves des divers pays s'y prennent pour résoudre des problèmes qui se prêtent à l'utilisation de stratégies diverses. Des différences sont à prévoir, en particulier dans le domaine du raisonnement proportionnel. Il se pourrait que la même stratégie soit appliquée dans tous les items dans certains pays, mais que les stratégies varient selon les items dans d'autres pays. Par ailleurs, des similitudes de raisonnement ne manqueront pas d'apparaître dans la résolution de problèmes qui ne se ressemblent pas. Cela rejoint les conclusions d'études récentes des données TIMSS (Mitchell, J. *et al.*, 2000). Les trois items suivants illustrent ce constat au sujet des différentes stratégies et des relations existant entre elles :

1. Vous avez décidé d'organiser une fête ce soir. Vous voulez acheter 100 canettes de limonade. Combien de paquets de six canettes allez-vous acheter ?
2. Une jeune femme s'envole en deltaplane d'une falaise de 120 mètres de haut. Le coefficient de descente en vol libre du deltaplane est de 1 pour 22. La pilote compte atteindre un endroit situé à une distance de 1 400 mètres. Réussira-t-elle à attendre cet endroit (en l'absence de vent) ?
3. Une école souhaite louer des minibus (pouvant accueillir huit passagers) pour emmener 98 élèves en colonie de vacances. Combien de minibus l'école doit-elle louer ?

Le premier problème peut être considéré comme un problème de division (100 ÷ 6 =...), qui laisse ensuite les élèves devant une difficulté d'interprétation nécessitant un retour au contexte (« Que signifie le reste ? »). Le deuxième problème peut être résolu par un raisonnement proportionnel (« La pilote peut parcourir une distance de 22 mètres par mètre de hauteur, donc en s'élançant à 120 mètres de haut… »). De nombreux élèves résoudront le troisième problème comme s'il s'agissait d'un problème de division. Pourtant, ces trois problèmes peuvent être résolus à l'aide de la méthode du tableau de proportionnalité :

Canettes	1	10	5	15	2	17
	6	60	30	90	12	102

Deltaplane	1	100	20	120
	22	2 200	440	2 640

Minibus	1	10	2	13
	8	80	16	104

Identifier cette similitude relève d'une compétence mathématique : les élèves mathématiquement « cultivés » n'ont pas besoin de rechercher l'outil ou l'algorithme particulier qui convient dans chaque cas, ils ont le choix entre un grand nombre de stratégies.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 9 : *POURCENTAGES*

Charles s'est rendu dans un magasin pour acheter une veste dont le prix normal est de 50 zeds, mais qui est soldée avec une réduction de 20 %. La Zedlande applique une taxe de 5 % sur les ventes. Le vendeur a d'abord ajouté les 5 % de taxe au prix de la veste, puis a déduit les 20 % de réduction. Charles a protesté : il aurait voulu que le vendeur déduise les 20 % avant d'ajouter les 5 % de taxe.

2 200

POURCENTAGES – *QUESTION 1*

Est-ce que cela entraîne une différence ? ....

Les problèmes impliquant ce type de réflexion quantitative et nécessitant l'exécution des calculs mentaux sont fréquents lorsque l'on fait des achats. La capacité à aborder correctement ce type de problème est un aspect fondamental de la *culture mathématique*.

Incertitude

Science et technologie ne riment guère avec certitude. Les connaissances scientifiques sont rarement absolues, si tant est qu'elles puissent l'être, et sont même parfois erronées. Les théories scientifiques, même les mieux étayées, recèlent donc une part d'incertitude. L'incertitude est présente aussi au quotidien : résultats incertains d'un scrutin électoral, ponts qui s'effondrent, krachs boursiers, prévisions météo peu fiables, projections erronées de croissance démographique, modèles économiques qui ne fonctionnent pas, etc.

L'idée majeure *Incertitude* renvoie à deux aspects interdépendants, les faits et le hasard, deux sujets d'études mathématiques qui relèvent respectivement des statistiques et des probabilités. Des études relativement récentes s'accordent à préconiser de donner beaucoup plus de place que par le passé aux statistiques et aux probabilités dans les programmes de cours (Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, 1982 ; LOGSE, 1990 ; MSEB, 1990 ; NCTM, 1989 ; NCTM, 2000). La collecte, l'analyse et la visualisation/représentation des données, les probabilités et les inférences sont autant d'activités et de concepts importants de ce domaine.

Les recommandations concernant la place à réserver aux données, aux statistiques et aux probabilités dans les programmes scolaires mettent surtout l'accent sur l'analyse des données, ce qui amène facilement à considérer les statistiques, en particulier, comme un ensemble de compétences spécifiques. David S. Moore a bien expliqué la vraie nature de l'idée majeure *Incertitude*. La définition retenue dans l'enquête PISA s'inspire de ses idées exposées dans l'ouvrage *On the Shoulders of Giants* (Steen, 1990) et de celles de F. James Rutherford présentées dans l'ouvrage *Why Numbers Count* (Steen, 1997).

Les statistiques apportent une contribution unique et importante à l'enseignement des mathématiques, en l'occurrence raisonner sur la base de données empiriques incertaines. Cette forme de pensée statistique devrait faire partie de l'arsenal mental de tous les citoyens réfléchis. Les éléments principaux sont les suivants :

- l'omniprésence du phénomène de variation dans les processus ;
- la nécessité de disposer de données à propos des processus ;
- la prise en considération du phénomène de variation lors de la conception de la collecte de données ;
- la quantification de la variation ; et
- l'explication de la variation.

Les données ne sont pas que de simples nombres, mais des nombres placés dans un contexte. On obtient des données en mesurant certaines caractéristiques, c'est-à-dire en les représentant par des nombres. Réfléchir au concept de mesure conduit à une vision mature des raisons pour lesquelles certains nombres sont porteurs d'informations et d'autres sont dénués de sens ou de pertinence.

La conception d'enquêtes sur échantillon est un des thèmes centraux des statistiques. Par l'analyse des données de l'échantillon, l'on s'efforce de comprendre les données spécifiques disponibles à supposer que celles-ci représentent une plus grande population. Le concept d'échantillon aléatoire simple est essentiel pour amener les élèves de 15 ans à comprendre les problèmes en rapport avec l'incertitude.

Les phénomènes se manifestent par des résultats qui, pris individuellement, sont incertains, et la séquence de résultats répétés est souvent aléatoire. Dans l'enquête PISA, le concept de probabilité est généralement abordé à partir de situations concernant des instruments du hasard (pièces de monnaie, dés, roues de la fortune) ainsi que de situations peu complexes de la vie courante, qui se prêtent à une analyse intuitive ou modélisée au moyen de ces instruments.

L'incertitude a aussi d'autres sources, comme dans le cas des variations naturelles de la taille des élèves, des résultats scolaires en lecture, des revenus d'un groupe de personnes, etc. Une étape très importante à franchir, même pour les jeunes de 15 ans, consiste à considérer l'étude des données et du hasard comme un ensemble cohérent. Parmi ces principes, citons le développement des idées depuis la simple analyse des données jusqu'à la production de données, aux probabilités et aux inférences.

Les activités et concepts mathématiques suivants sont importants dans ce domaine :

- la production de données ;
- l'analyse et la visualisation/représentation des données ;
- les probabilités ; et
- les inférences.

***Exemples illustrant l'idée majeure* Incertitude**

Les exemples suivants illustrent l'idée majeure *Incertitude*.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 10 : *ÂGE MOYEN*

Si 40 % des habitants d'un pays ont au moins 60 ans, est-il possible que l'âge moyen de la population soit de 30 ans ?

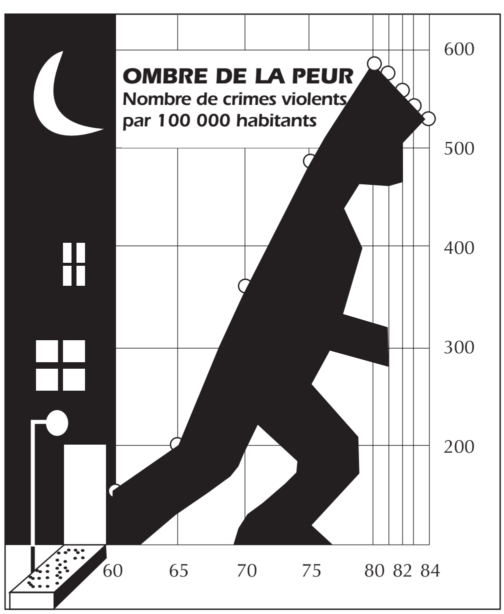
MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 11 : *AUGMENTATION DES REVENUS ?*

Le revenu des habitants de la Zedlande a-t-il augmenté ou diminué au cours de ces dernières décennies ? Le revenu moyen par ménage a chuté : 34 200 zeds en 1970, 30 500 zeds en 1980 et 31 200 zeds en 1990. En revanche, le revenu moyen par personne a augmenté : il est passé de 13 500 zeds en 1970 à 13 850 zeds en 1980 et à 15 777 zeds en 1990.

Un ménage est constitué de toutes les personnes habitant à la même adresse. Expliquez pourquoi il est possible qu'en Zedlande, le revenu des ménages diminue et qu'au même moment, le revenu par personne augmente.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 12 : *ACCROISSEMENT DE LA CRIMINALITÉ*

Le graphique suivant est extrait de l'hebdomadaire zedlandais *Les Nouvelles* :

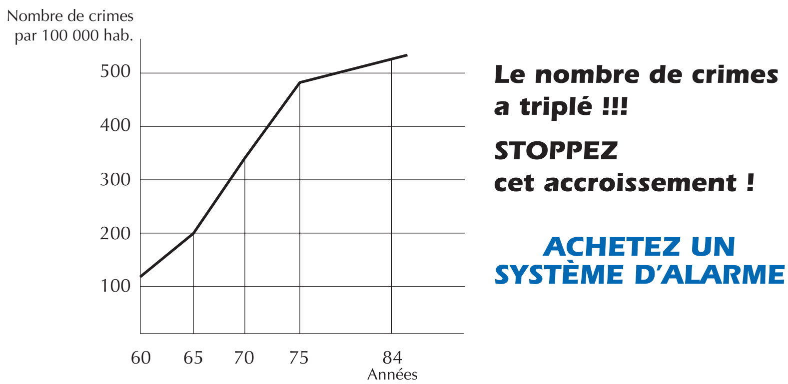


Il présente l'évolution du nombre de crimes déclarés pour 100 000 habitants, pour des intervalles de temps qui sont au début de cinq ans, puis passent à un an.

ACCROISSEMENT DE LA CRIMINALITÉ – *QUESTION 1*

Combien y a-t-il eu de crimes déclarés par 100 000 habitants en 1960 ?

Les fabricants de systèmes d'alarme ont utilisé les mêmes données pour établir le graphique suivant :



ACCROISSEMENT DE LA CRIMINALITÉ – *QUESTION 2*

Comment les graphistes s'y sont-ils pris pour établir ce graphique ? Et pourquoi ?

La police n'a guère apprécié le graphique préparé par les fabricants de systèmes d'alarme, car elle souhaite montrer que sa lutte contre la criminalité a eu du succès.

Dessinez un graphique que la police pourrait utiliser pour démontrer que la criminalité a récemment diminué.

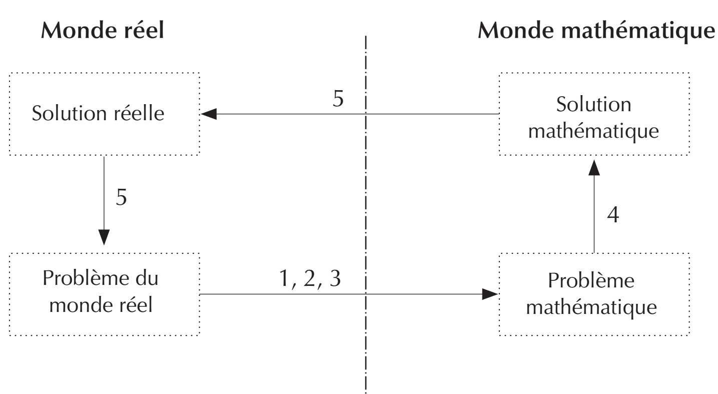
Processus mathématiques

Mathématisation

L'enquête PISA étudie la capacité des élèves à analyser des idées mathématiques, à raisonner à leur propos et à les communiquer à autrui, lorsqu'ils posent, formulent, résolvent et interprètent des problèmes mathématiques relevant de situations diverses. Pour résoudre ces problèmes, les élèves doivent exploiter les connaissances, compétences et processus mathématiques qu'ils ont acquis tout au long de leur scolarité et de leurs expériences. Dans l'enquête PISA, le terme de « mathématisation » désigne le processus fondamental appliqué par les élèves pour résoudre des problèmes de la vie courante.

Les cinq étapes du processus de mathématisation sont décrites dans la section ci-dessus sur les fondements théoriques du cadre d'évaluation PISA de la culture mathématique. Elles sont représentées dans la figure 2.8 et énumérées ci-après.

■ Figure 2.8 ■
Le cycle de mathématisation



1. Aborder un problème relevant de la réalité.
2. Identifier les concepts mathématiques intervenant dans le problème et organiser le problème en fonction de ces concepts.
3. Effacer progressivement la réalité au travers de divers processus, tels que la formulation d'hypothèses, la généralisation et la formalisation, dont l'objectif est de faire ressortir les caractéristiques mathématiques de la situation et de transformer le problème réel en un problème mathématique qui soit le reflet fidèle de la situation.
4. Résoudre le problème mathématique.
5. Comprendre la solution mathématique et l'appliquer à la situation réelle, ce qui implique aussi d'identifier les limites de la solution.

La mathématisation commence par la transposition du problème de la réalité dans les mathématiques. Ce processus consiste à :

- Identifier les éléments mathématiques pertinents se rapportant à un problème qui s'inscrit dans la réalité.
- Représenter le problème sous une forme différente, l'organiser en fonction de concepts mathématiques et formuler des hypothèses appropriées.
- Comprendre les relations entre le langage employé pour décrire le problème et le langage symbolique et formel indispensable pour le comprendre en termes mathématiques.
- Identifier des régularités, des relations et des récurrences.
- Identifier des aspects isomorphes par rapport à des problèmes connus.
- Traduire le problème en termes mathématiques, c'est-à-dire en un modèle mathématique (de Lange, 1987).

Une fois le problème transposé sous une forme mathématique, le processus de résolution peut se poursuivre dans le monde des mathématiques. Les élèves se posent des questions du type : « Y a-t-il… ? », « Si oui, combien…. ? », « Comment trouver… ? » en utilisant des compétences et des concepts mathématiques connus. Ils tentent de travailler sur leur modèle du problème, d'établir des régularités, d'identifier des relations et de créer un raisonnement mathématique pertinent. Cette étape de la mathématisation est souvent appelée « étape déductive du cycle de modélisation » (Blum, 1996 ; Schupp, 1988). Cependant, des processus qui ne sont pas strictement déductifs peuvent également intervenir à ce stade. Cette partie du processus de mathématisation consiste à :

- Utiliser différentes représentations et passer des unes aux autres.
- Utiliser un langage et des opérations de nature symbolique, formelle et technique.
- Affiner et ajuster des modèles mathématiques, les combiner et les intégrer.
- Argumenter.
- Généraliser.

La ou les dernières étapes de résolution de problème consistent à réfléchir à l'ensemble du processus de mathématisation et au résultat obtenu. À ce stade, les élèves doivent interpréter les résultats en adoptant une attitude critique, puis valider l'ensemble du processus. Ce type de réflexion accompagne toutes les phases du processus, mais elle est particulièrement importante lors de l'étape finale de résolution. Ce processus de réflexion et de validation consiste à :

- Comprendre la portée et les limites des concepts mathématiques.
- Réfléchir aux arguments mathématiques et expliquer et justifier les résultats.
- Communiquer le procédé utilisé et la solution.
- Critiquer le modèle et ses limites.

Dans la figure 2.8, cette étape est représentée à deux reprises par le chiffre « 5 » : lors du passage de la solution mathématique à la solution concrète et lors de la mise en relation de celle-ci avec le problème réel.

Les compétences mathématiques cognitives

La section précédente a étudié les principaux concepts et processus de la mathématisation. Pour réussir le processus de mathématisation dans un grand nombre de situations et de contextes intra- et extra-mathématiques différents et dans des idées majeures différentes, il faut posséder une série de compétences mathématiques qui, ensemble, peuvent être considérées comme une compétence mathématique globale. Le niveau de maîtrise peut varier entre ces compétences.

Les différents aspects de la mathématisation font appel à ces compétences à des degrés divers, et le niveau de maîtrise requis pour chacune de ces compétences varie. L'enquête PISA utilise huit catégories de compétences mathématiques cognitives qui s'appuient, dans leur forme actuelle, sur les travaux de Niss (1999) et de ses collègues danois. Des formulations voisines se retrouvent dans les travaux de nombreux autres spécialistes (voir Neubrand *et al.*, 2001). Il y a lieu de signaler, toutefois, que l'acception de certains termes employés varie selon les auteurs.

- *Pensée et raisonnement :* poser des questions caractéristiques des mathématiques (« Y a-t-il… ? », « Si oui, combien… ? » ou « Comment trouver… ? ») ; savoir quels types de réponse les mathématiques peuvent apporter à ces questions ; faire la distinction entre différents types d'énoncés (définitions, théorèmes, conjectures, hypothèses, exemples, affirmations conditionnelles) ; et comprendre la portée et les limites de concepts mathématiques donnés, et en tenir compte.
- *Argumentation :* savoir ce que sont des démonstrations mathématiques et comprendre en quoi elles diffèrent d'autres types de raisonnements mathématiques ; suivre et évaluer des enchaînements d'arguments mathématiques différents ; avoir un sens heuristique (« Qu'est-ce qu'il peut se passer – ou pas ? » et « Pourquoi ? ») ; et créer et exprimer des arguments mathématiques.
- *Communication :* s'exprimer de diverses manières sur des sujets à contenu mathématique, oralement et par écrit ; et comprendre les énoncés écrits ou verbaux produits par d'autres sur de tels sujets.
- *Modélisation :* structurer le champ ou la situation à modéliser ; traduire la réalité en structures mathématiques ; interpréter des modèles mathématiques en termes de réalité ; utiliser un modèle mathématique ; le valider ; réfléchir au modèle et à ses résultats, les analyser et les critiquer ; s'exprimer à propos du modèle et de ses résultats (et de leurs limites) ; et gérer et contrôler le processus de modélisation.
- *Formulation et résolution de problèmes* : poser, formuler et définir différentes sortes de problèmes mathématiques (problèmes de type « pur », « appliqué », « ouvert » ou « fermé ») et résoudre différentes sortes de problèmes mathématiques par divers moyens.
- *Représentation :* décoder et encoder, transposer, interpréter et distinguer les différentes formes de représentation d'objets et de situations mathématiques ainsi que les relations entre ces diverses représentations ; choisir entre différentes formes de représentation et passer des unes aux autres en fonction de la situation et du but recherché.
- *Utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique :* décoder et interpréter le langage symbolique et formel et comprendre sa relation avec le langage naturel ; traduire le langage naturel en langage symbolique et formel ; utiliser des énoncés et des expressions contenant des symboles et des formules ; et utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs.
- *Utilisation d'instruments et d'outils :* connaître divers instruments et outils (y compris informatiques) qui peuvent être utiles à l'activité mathématique, être capable de les utiliser et en connaître les limites.

Dans l'enquête PISA, ces compétences mathématiques cognitives ne sont pas évaluées séparément. Elles se chevauchent considérablement et il faut généralement en utiliser de nombreuses différentes en même temps. Vouloir les évaluer une à une de façon isolée aboutirait vraisemblablement à la production de tâches artificielles et à une parcellisation inutile. Les savoirs, savoir-faire et processus mathématiques spécifiques que les élèves sont capables d'exploiter varient considérablement, en partie parce que tout apprentissage résulte d'expériences, « la construction du savoir individuel prenant place tout au long d'un processus d'interaction, de négociation et de collaboration » (de Corte, Greer et Verschaffel, 1996). Dans l'enquête PISA, on part du principe que les élèves ont acquis une grande partie de leurs connaissances en mathématiques à l'école et que la compréhension d'un domaine s'acquiert graduellement. Au fil du temps émergent des modes de représentation et de raisonnement plus formels et plus abstraits, du fait de la découverte d'activités conçues pour faire évoluer des idées informelles. La *culture mathématique* s'acquiert aussi au travers d'expériences impliquant des interactions dans toutes sortes de situations et de contextes sociaux.

Une certaine structure s'impose pour décrire les compétences, les points forts et les points faibles des élèves, et en rendre compte dans une perspective internationale. Une façon simple et pratique de le faire consiste à décrire des groupes de compétences mathématiques cognitives en fonction des types d'exigences cognitives de la résolution de problèmes mathématiques différents.

Les groupes de compétences

Dans l'enquête PISA, les activités cognitives correspondant à ces compétences mathématiques cognitives sont classées en trois groupes : le groupe de *Reproduction*, le groupe de *Connexion* et le groupe de *Réflexion*. Ces trois groupes, et la manière dont les compétences s'articulent dans chacun d'eux, sont décrits ci-après.

***Le groupe de* Reproduction**

Les compétences mathématiques de ce groupe ont trait à la reproduction de connaissances déjà mises en œuvre. Elles concernent les connaissances, compétences et processus mathématiques les plus souvent ciblés dans les évaluations normalisées et les évaluations menées en classe : connaissance de faits et de représentations de problèmes courants, identification d'équivalences, restitution de propriétés et d'objets mathématiques familiers, exécution de procédures de routine, application d'algorithmes standard et de compétences techniques, utilisation d'expressions contenant des symboles et de formules standard, et réalisation de calculs.

- *Pensée et raisonnement :* poser les questions mathématiques les plus élémentaires (« Combien… ? », « Quelle quantité… ? ») et comprendre les types de réponse y afférents (« Tant… », « Telle quantité ») ; faire la distinction entre des définitions et des affirmations ; comprendre et utiliser des concepts mathématiques dans les mêmes contextes que ceux où ils ont été rencontrés pour la première fois et où ils ont été pratiqués par la suite.
- *Argumentation :* suivre et justifier des processus quantitatifs standard, notamment des processus de calcul, des énoncés et des résultats.
- *Communication :* comprendre et formuler soi-même, oralement ou par écrit, des éléments mathématiques simples, par exemple restituer le nom et les propriétés principales d'objets mathématiques familiers et présenter des calculs et leurs résultats, généralement selon une seule approche.
- *Modélisation :* identifier, restituer, activer ou exploiter des modèles familiers bien structurés ; interpréter ces modèles (et leurs résultats) et passer de ceux-ci à la réalité ; et communiquer les résultats des modèles de manière élémentaire.
- *Formulation et résolution de problèmes :* poser et formuler des problèmes *via* l'identification et la restitution de problèmes purs et appliqués fermés assimilés ; et résoudre ces problèmes au moyen de démarches et de procédures standard, qui ne font généralement appel qu'à un seul type de procédé.
- *Représentation :* encoder, décoder et interpréter des représentations d'objets mathématiques bien connus, sous une forme standard qui a été déjà été pratiquée. Le passage d'une représentation à une autre n'est requis que lorsque ce passage fait lui-même partie de la représentation visée.
- *Utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique :* décoder et interpréter, dans des situations et des contextes bien connus, des expressions symboliques et formelles de base ; traiter des énoncés et des expressions simples contenant des symboles et des formules, notamment utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs selon des procédés de routine.
- *Utiliser d'instruments et d'outils :* connaître des instruments et des outils familiers, et les utiliser dans des contextes et selon des procédés semblables à ceux dans lesquels ils ont été rencontrés et mis en pratique.

Deux concepts résument bien les items utilisés pour évaluer les compétences du groupe de *reproduction* : la reproduction d'acquis déjà mis en œuvre et l'exécution d'opérations de routine.

Des items du groupe de *Reproduction* qui pourraient être posés aux élèves lors des épreuves sont présentés ci-dessous à titre d'exemples.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 13

Résoudre l'équation $7x - 3 = 13x + 15$

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 14

Quelle est la moyenne de 7, 12, 8, 14, 15, 9 ?

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 15

Un montant de 1 000 zeds est déposé sur un compte d'épargne à la banque à un taux d'intérêt de 4 %. Après un an, combien y aura-t-il de zeds sur ce compte ?

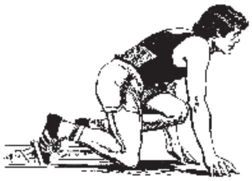
Les items *TEMPS DE RÉACTION* et *EXPORTATIONS* ci-après ont été utilisés lors du cycle PISA 2003, le premier lors de l'essai de terrain et le second lors de la campagne d'évaluation définitive.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 16 : *TEMPS DE RÉACTION*

Dans un championnat de sprint, on appelle « temps de réaction » l'intervalle entre le coup de pistolet de départ et le moment où l'athlète quitte les starting-blocks. Le temps final inclut à la fois ce temps de réaction et de course.

Le tableau suivant présente le temps de réaction et le temps final de 8 coureurs lors d'une course de sprint de 100 mètres.

Couloir	Temps de réaction (s)	Temps final (s)
1	0.147	10.09
2	0.136	9.99
3	0.197	9.87
4	0.180	N'a pas terminé la course
5	0.210	10.17
6	0.216	10.04
7	0.174	10.08
8	0.193	10.13



TEMPS DE RÉACTION – *QUESTION 1*

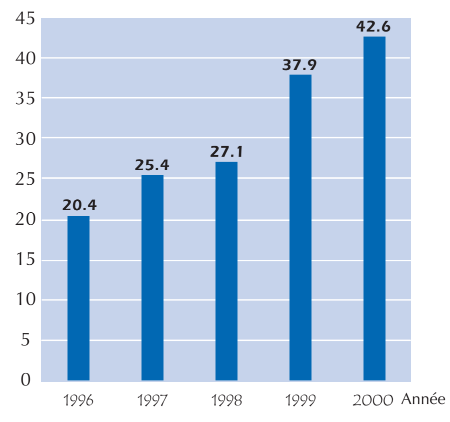
Identifiez les coureurs qui ont remporté les médailles d'or, d'argent et de bronze à l'issue de cette course. Complétez le tableau ci-dessous avec les numéros de couloir, les temps de réaction et le temps final des coureurs médaillés.

Médaille	Couloir	Temps de réaction (s)	Temps final (s)
OR			
ARGENT			
BRONZE			

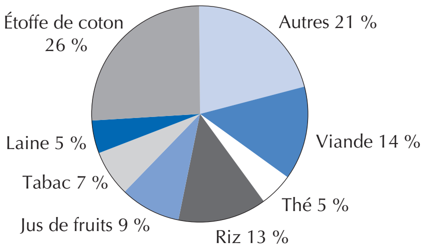
MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 17 : *EXPORATIONS*

Les graphiques ci-dessous fournissent des informations sur les exportations de la Zedlande, un pays dont la monnaie est le zed.

Total des exportations annuelles de la Zedlande en millions de zeds, 1996-2000



Répartition des exportations de la Zedlande pour l'année 2000



EXPORTATIONS – *QUESTION 1*

Quel était le montant des exportations de jus de fruits de la Zedlande en 2000 ?

A. 1.8 million de zeds.

B. 2.3 millions de zeds.

C. 2.4 millions de zeds.

D. 3.4 millions de zeds.

E. 3.8 millions de zeds.

Pour préciser les limites des items du groupe de *reproduction*, il y a lieu de signaler que le problème *COMPTE D'ÉPARGNE* proposé dans l'exemple n° 3 ne relève pas de ce groupe. Pour la plupart des élèves, ce problème demande plus que la simple application d'une procédure de routine. Il exige l'application d'un enchaînement de raisonnements et d'étapes de calcul qui ne sont pas caractéristiques des connaissances, compétences et processus mathématiques du groupe de *Reproduction*.

***Le groupe de* Connexion**

Le groupe de *Connexion* s'inscrit dans le prolongement du groupe *reproduction* dans la mesure où ses compétences servent à la résolution de problèmes qui se situent dans des situations familières ou quasi familières, sans que l'on puisse les qualifier de simples routines. Les connaissances, compétences et processus mathématiques de ce groupe sont les suivants :

- *Pensée et raisonnement :* poser des questions du type « Comment trouver…. ? », « Quel est le traitement mathématique qui… ? », etc., et comprendre les types de réponse y afférents (informations fournies au moyen de tableaux, graphiques, solutions algébriques, schémas, etc.) ; faire la distinction entre des définitions et des affirmations, ainsi qu'entre des types différents d'affirmations ; et comprendre et utiliser des concepts mathématiques dans des contextes qui diffèrent légèrement de ceux où ils ont été rencontrés la première fois ou ont été utilisés par la suite.
- *Argumentation :* effectuer des raisonnements mathématiques simples, sans distinction entre des preuves et des formes plus générales d'argumentation ou de raisonnement ; suivre et évaluer des enchaînements d'arguments mathématiques de divers types ; et avoir un sens heuristique (par exemple, se demander « Ce qui peut se passer ou non, et pourquoi » ou « Que sais-je et que dois-je obtenir ? »).
- *Communication :* comprendre et formuler soi-même, oralement ou par écrit, des énoncés mathématiques allant de la restitution du nom et des propriétés principales d'objets familiers ou de l'explication d'un calcul et de son résultat (généralement de plus d'une manière) jusqu'à l'explication d'aspects où interviennent des relations. Comprendre les mêmes types d'énoncés faits oralement ou par écrit par d'autres.
- *Modélisation :* structurer le champ ou la situation qu'il y a lieu de modéliser ; transposer la « réalité » en structures mathématiques dans des contextes qui ne sont pas très complexes, mais qui diffèrent néanmoins de ceux qui sont familiers aux élèves. Construire une interprétation en faisant l'aller-retour entre les modèles (et leurs résultats) et la réalité, et communiquer à propos des résultats des modèles.
- *Formulation et résolution de problèmes :* poser et formuler des problèmes d'une manière qui va au-delà de la reproduction de problèmes connus, de nature formelle ou appliquée et de type fermé ; résoudre ce type de problèmes en utilisant des démarches et des procédures standard, mais aussi en faisant appel à des processus de résolution de problèmes plus autonomes, qui mettent en relation différents domaines mathématiques ou différents modes de présentation et de communication (schémas, tableaux, graphiques, explications verbales, croquis).
- *Représentation :* encoder, décoder et interpréter des représentations d'objets mathématiques plus ou moins connus ; choisir entre diverses formes de représentation d'objets et de situations mathématiques ; et passer des unes aux autres en les distinguant et en les transposant.
- *Utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique :* décoder et interpréter, dans des situations et des contextes moins bien connus, des expressions symboliques et formelles de base ; et utiliser des énoncés et des expressions contenant des symboles et des formules, notamment utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs selon des procédés familiers.
- *Utilisation d'instruments et d'outils :* connaître et utiliser des instruments et des outils familiers, dans des contextes et selon des procédés qui diffèrent de ceux où ces instruments et outils ont été rencontrés pour la première fois et ont été utilisés par la suite.

Les items relevant de ce groupe de compétences demandent généralement aux élèves de démontrer qu'ils sont capables d'intégrer et de mettre en relation des concepts appartenant à des idées majeures différentes ou à des branches différentes des mathématiques, ou d'établir des liens entre diverses représentations d'un problème.

Trois concepts résument bien les items utilisés pour évaluer le groupe de *Connexion* : l'intégration, la mise en relation (connexion) et un degré modéré d'extension des acquis déjà pratiqués.

***Exemples d'items du groupe de* Connexion**

Un premier exemple d'item du groupe de *Connexion* a déjà été présenté ci-dessus, en l'occurrence dans l'exemple n° 3 *COMPTE D'ÉPARGNE*. D'autres exemples d'items du groupe de *Connexion* sont proposés ci-après.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 18 : *DISTANCE*

Marie habite à deux kilomètres de l'école ; Martin, à cinq kilomètres.

DISTANCE – *QUESTION 1*

À quelle distance Marie et Martin habitent-ils l'un de l'autre ?

....

Nombreux sont les enseignants auxquels ce problème a été soumis à l'avoir rejeté, invoquant le fait qu'il était trop facile et que n'importe qui pouvait trouver la bonne réponse, trois kilomètres. Selon d'autres enseignants, ce n'était pas un « bon » item puisqu'il n'y avait pas de réponse (en tout cas, pas une seule réponse numérique correcte). D'autres encore ont estimé que c'était un « mauvais » item à cause de ses nombreuses réponses possibles : faute d'informations, le mieux que l'on puisse en conclure, c'est que les enfants habitent à une distance comprise entre trois et sept kilomètres l'un de l'autre, ce qui est une caractéristique peu souhaitable pour un item. Enfin, un petit nombre d'enseignants a estimé que c'était un excellent item : les élèves doivent comprendre la question, qui fait réellement appel à leurs capacités de résolution de problèmes, car il ne correspond à aucune stratégie connue, et c'est un « beau » problème mathématique, malgré l'absence d'indices sur la manière dont les élèves peuvent les résoudre. Selon cette dernière interprétation, ce problème se classe parmi ceux qui font intervenir les connaissances, compétences et processus mathématiques associés au groupe de *Connexion*.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 19 : *LOCATION D'UN BUREAU*

Les deux annonces suivantes ont été publiées dans un quotidien d'un pays dont la monnaie est le zed.

IMMEUBLE A	**IMMEUBLE B**
Bureaux à louer 58-95 mètres carrés 475 zeds par mois 100-120 mètres carrés 800 zeds par mois	Bureaux à louer 35-260 mètres carrés 90 zeds par mètre carré et par an

LOCATION D'UN BUREAU – *QUESTION 1*

Si une entreprise est intéressée par la location d'un bureau de 110 mètres carrés dans ce pays pour une durée d'un an, dans quel immeuble, A ou B, devra-t-elle louer le bureau pour obtenir le prix le plus bas ? Montrez votre travail.
[© IEA/TIMSS]

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 20 : *PIZZA*

Une pizzeria propose deux pizzas rondes de même épaisseur, mais de taille différente. La plus petite a un diamètre de 30 centimètres et coûte 30 zeds. La plus grande a un diamètre de 40 centimètres et coûte 40 zeds. [© PRIM, Stockholm Institute of Education]

PIZZA – *QUESTION 1*

Laquelle des deux pizzas est la plus avantageuse par rapport à son prix ? Expliquez votre raisonnement.

....

Dans chacun de ces deux problèmes, l'élève doit traduire une situation de la vie courante en langage mathématique, élaborer un modèle mathématique qui permette de faire la comparaison appropriée, vérifier que la solution obtenue cadre avec le contexte de la question initiale et communiquer le résultat. Toutes ces activités relèvent du groupe de *Connexion*.

Le groupe de **Réflexion**

Les connaissances, compétences et processus mathématiques associés à ce groupe incluent un sens de la réflexion de la part des élèves à propos des procédés requis ou utilisés pour résoudre un problème. Ils sont en rapport avec les capacités auxquelles les élèves font appel pour envisager des stratégies de résolution et les appliquer dans des situations qui contiennent davantage d'éléments et qui sont plus « originales » (moins familières) que celles du groupe de *Connexion*. Outre les connaissances, compétences et processus décrits dans le groupe de *Connexion*, ce groupe de *Réflexion* inclut ce qui suit :

- *Pensée et raisonnement :* poser des questions « Comment trouver… ? », « Quel est le traitement mathématique qui… ? » ou « Quels sont les aspects essentiels du problème ou de la situation ? » et comprendre les types de réponse y afférents (informations fournies au moyen de tableaux, de graphiques, de solutions algébriques, de schémas, de spécification des points-clés, etc.) ; faire la distinction entre des définitions, des théorèmes, des conjectures, des hypothèses et des affirmations portant sur des cas particuliers, et réfléchir à ces distinctions ou les structurer de manière active ; comprendre et utiliser des notions mathématiques dans des contextes nouveaux ou complexes ; comprendre la portée et les limites des concepts mathématiques donnés, et généraliser les résultats.
- *Argumentation :* effectuer des raisonnements mathématiques simples, en faisant la distinction entre des démonstrations, des preuves et des formes plus générales d'argumentation ou de raisonnement ; suivre, évaluer et construire des enchaînements d'arguments mathématiques de divers types ; et utiliser une démarche heuristique (par exemple, se demander « Que peut-il se passer ou non, et pourquoi ? », « Que sais-je et que dois-je obtenir ? », « Lesquelles de ces propriétés sont essentielles ? » ou « Quelle est la relation entre ces objets ? »).
- *Communication :* comprendre et formuler soi-même, oralement ou par écrit, des énoncés mathématiques allant de la restitution du nom et des propriétés principales d'objets familiers ou de l'explication d'un calcul et de son résultat (généralement de plus d'une manière) jusqu'à l'explication d'aspects où interviennent des relations complexes, notamment des relations logiques ; comprendre les mêmes types d'énoncés faits oralement ou par écrit par d'autres.
- *Modélisation :* structurer le champ ou la situation qu'il y a lieu de modéliser ; transposer la réalité en structures mathématiques dans des contextes qui peuvent être complexes ou très différents de ceux qui sont familiers aux élèves ; construire une interprétation en faisant l'aller-retour entre les modèles (et leurs résultats) et la réalité ; communiquer à propos des résultats des modèles ; réunir des informations et des données ; gérer le processus de modélisation et valider le modèle qui en résulte ; réfléchir de manière analytique, proposer une critique et s'engager dans des formes de communication plus complexes sur les modèles et la modélisation.
- *Formulation et résolution de problèmes :* poser et formuler des problèmes d'une manière qui va au-delà de la reproduction de problèmes connus, de nature formelle ou appliquée et de type fermé ; résoudre ce type de problèmes en utilisant des démarches et des procédures standard, mais aussi en faisant appel à des processus de résolution de problèmes plus originaux, qui mettent en relation différents domaines mathématiques ou différents modes de présentation et de communication (schémas, tableaux, graphiques, explications verbales, croquis) ; réfléchir aux stratégies et aux solutions.
- *Représentation :* encoder, décoder et interpréter des représentations d'objets mathématiques familiers et moins familiers ; choisir entre diverses formes de représentation d'objets et de situations mathématiques, et passer des unes aux autres, les distinguer et les transposer ; combiner de manière créative des représentations ou en inventer d'inédites.
- *Utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique :* décoder et interpréter, dans des situations et des contextes inconnus, un langage symbolique et formel ; utiliser des énoncés et des expressions contenant des symboles et des formules, notamment utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs, utiliser des énoncés et des expressions complexes, contenant des symboles ou des termes formels non familiers, et comprendre ce langage et le traduire en langue courante.
- *Utilisation d'instruments et d'outils :* connaître et utiliser des instruments et des outils familiers et non familiers, dans des contextes et selon des procédés qui diffèrent de ceux où ces instruments et outils ont été rencontrés pour la première fois et ont été utilisés par la suite, et connaître les limites de ces instruments et outils.

Les concepts qui résument le mieux les items utilisés pour évaluer le groupe de *Réflexion* sont les suivants : le raisonnement approfondi, l'argumentation, l'abstraction, la généralisation et la modélisation appliquée à de nouveaux concepts.

***Exemples d'items du groupe de* Réflexion**

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 21 : *TAILLE DES ÉLÈVES*

Un jour, dans un cours de mathématiques, on mesure la taille de tous les élèves. La taille moyenne des garçons est 160 cm et la taille moyenne des filles est 150 cm. Aline est la plus grande : elle mesure 160 cm. Zénon est le plus petit : il mesure 130 cm.

Deux élèves sont absents ce jour-là, mais ils viennent en classe le jour suivant. On a mesuré leur taille et recalculé les moyennes. Étonnamment, ni la taille moyenne des filles ni celle des garçons n'ont changé.

TAILLE DES ÉLÈVES – *QUESTION 1*

Déterminez si les conclusions suivantes peuvent être tirées de ces informations.

Entourez « Oui » ou « Non » pour chacune des conclusions.

Conclusion	Peut-on tirer cette conclusion ?
Les deux élèves sont des filles.	Oui / Non
Un des élèves est un garçon et l'autre est une fille.	Oui / Non
Les deux élèves ont la même taille.	Oui / Non
La taille moyenne de l'ensemble des élèves n'a pas changé.	Oui / Non
Zénon est toujours le plus petit.	Oui / Non

Ce problème est compliqué à plusieurs égards. Il implique une lecture très précise, car une lecture superficielle risque d'amener bien des élèves à ne pas interpréter correctement ce qui est dit. Selon Norris et Phillips (2003), la compréhension de l'écrit est fondamentale pour la culture scientifique. De même, la culture mathématique dépend dans une certaine mesure des compétences en lecture. L'item ci-dessus illustre l'importance de l'aspect *réceptif* de la compétence de communication, essentielle dans cet exemple. Il montre aussi que cet aspect de la *culture mathématique* recoupe d'autres types de compétences, en particulier celles associées à la *compréhension de l'écrit*. Qui plus est, il est difficile de localiser les informations mathématiques cruciales à cause de la formulation du problème. Il n'est pas possible d'éviter que le domaine d'évaluation PISA de *culture mathématique* ne chevauche d'autres domaines. Toutefois, il faut faire en sorte que dans chaque tâche d'évaluation, il y ait des aspects relevant sans ambiguïté des connaissances et compétences mathématiques. Dans ce cas, l'interprétation de phrases contenant des données mathématiques et la transposition de celles-ci sous une forme mathématique utile sont les défis mathématiques majeurs à surmonter pour pouvoir trouver une solution au problème.

Dans cet item, la situation varie dans la *classe* et dans le *temps*. On parle de l'entité *classe* tout en évoquant des moyennes séparées pour les filles et les garçons mais, par la suite, on déclare qu'Aline est la plus grande (des filles ou des élèves) et que Zénon est le plus petit (des garçons ou des élèves). Si les élèves ne lisent pas le texte attentivement, ils risquent de ne pas remarquer que Zénon est un garçon et qu'Aline est une fille.

Une difficulté est manifeste : les élèves doivent combiner les éléments donnés dans la première partie du stimulus (à propos des tailles différentes) et dans la deuxième partie du stimulus, qui contient les informations sur les deux élèves absents. C'est à cet égard que se produit la variation dans le *temps* : deux élèves ne sont pas présents au début, mais doivent être pris en compte par la suite. La classe s'agrandit donc, mais l'individu qui résout le problème ne sait pas si les deux élèves supplémentaires sont deux filles, deux garçons, ou un garçon et une fille. À ces difficultés vient s'ajouter le fait qu'il n'y a pas qu'une question posée, mais cinq.

Par ailleurs, pour répondre correctement aux questions, les élèves doivent vraiment comprendre les concepts statistiques sous-jacents sous l'angle mathématique. Ils doivent se poser des questions (« Comment le sait-on ? », « Comment trouver… ? », « Quelles sont les possibilités ? » et « Que se passe-t-il si… ? »), et être capables de comprendre et d'utiliser le concept de moyenne dans un texte qui est complexe, même s'il s'inscrit dans un contexte familier.

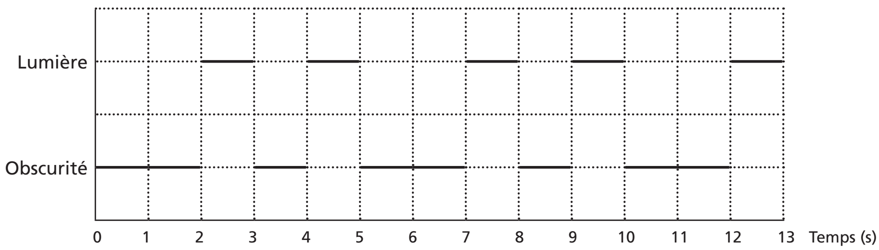
Cette description montre clairement que cet item représente un défi pour les élèves (ce que confirment les résultats de l'enquête PISA) et qu'il relève aussi clairement du groupe de *Réflexion*.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 22 : *PHARE*

Les phares sont des tours surmontées d'une balise lumineuse qui aide les bateaux à trouver leur chemin la nuit lorsqu'ils naviguent à proximité du rivage.

Une balise de phare émet des signaux lumineux selon une séquence régulière fixée. Chaque phare a sa propre séquence.

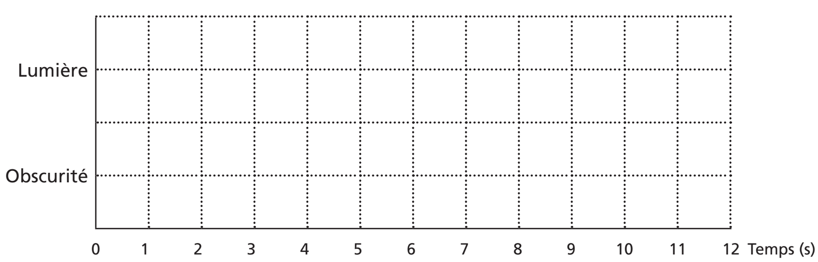
Le diagramme ci-dessous montre la séquence des signaux lumineux d'un phare déterminé. Les signaux lumineux alternent avec des périodes d'obscurité.



Il s'agit d'une séquence régulière. Au bout d'un certain temps, la séquence se répète. La durée d'une séquence complète, avant que celle-ci ne recommence à se répéter, s'appelle une période. Si vous trouvez la période d'une séquence, il devient facile de compléter le diagramme pour les secondes, les minutes ou même les heures suivantes.

PHARE – *QUESTION 1*

Dans le quadrillage ci-dessous, dessinez le graphique d'une séquence possible pour un phare qui émettrait des signaux lumineux pendant 30 secondes par minute. La période de cette séquence doit être égale à 6 secondes.



Dans cet exemple, les élèves doivent tout d'abord comprendre l'introduction. En effet, ce type de graphique risque bien de ne pas leur être familier, à l'instar d'ailleurs de la notion de périodicité. De plus, la question posée est très ouverte : les élèves doivent dessiner le graphique d'une séquence possible de signaux lumineux. Nombreux sont les élèves qui ne rencontrent pas ce genre de questions constructives à l'école. Toutefois, cet aspect constructif est une composante essentielle de la *culture mathématique* : les compétences mathématiques ne sont plus seulement utilisées de manière passive ou indirecte, mais elles sont mises à profit pour construire une réponse. La solution de ce problème ne va pas de soi, car il y a deux conditions à remplir : la durée d'obscurité et la durée de lumière doivent être égales (« 30 secondes par minute ») et la période doit être de 6 secondes. Cette double condition nécessite chez l'élève une véritable compréhension du concept de périodicité – le problème relève donc bien du groupe de *Réflexion*.

On pourrait reprocher à cet exemple particulier que son contexte est de nature à favoriser les élèves qui vivent à proximité de la mer. Il y a lieu de souligner, cependant, qu'être à même d'utiliser les mathématiques dans des contextes qui diffèrent des contextes immédiats fait partie de la *culture mathématique*. Cette faculté de transfert est une composante essentielle de la *culture mathématique*. Cela n'exclut pas la possibilité que les élèves soient avantagés dans certains items et pénalisés dans d'autres. L'analyse des interactions item/pays montre toutefois que ce n'est pas le cas ici : on n'observe pas de différences entre les pays ayant une large façade océanique et ceux sans accès à la mer.

Classification des items par groupe de compétences

La figure 2.9 résume les distinctions entre les groupes de compétences.

■ Figure 2.9 ■
Représentation synthétique des groupes de compétences

CULTURE MATHÉMATIQUE

Groupe de *Reproduction*	Groupe de *Connexion*	Groupe de *Réflexion*
▪ Définitions et représentations standard ▪ Calculs de routine ▪ Procédures de routine ▪ Résolution routinière de problèmes	▪ Mise en relation des représentations et structures du monde réel avec celles des mathématiques ▪ Résolution de problèmes standard ▪ Transposition et interprétation ▪ Méthodes multiples, mais bien définies	▪ Formulation et résolution de problèmes complexes ▪ Réflexion et compréhension approfondie ▪ Approche mathématique originale ▪ Méthodes multiples et complexes ▪ Généralisation

Il est possible de se servir des descriptions des compétences ci-dessus pour classer les items de mathématiques et assigner chacun d'eux à l'un des groupes de compétences. On peut y parvenir en analysant les savoir-faire que l'item demande à l'élève de mettre en œuvre. Pour chacune des huit compétences mathématiques cognitives, on procède ensuite à une évaluation pour établir lequel des trois groupes décrit le mieux les exigences de cet item particulier en relation avec telle compétence spécifique. Si une ou plusieurs des compétences requises correspondent à la description du groupe de *Réflexion*, l'item est classé dans ce groupe. Si ce n'est pas le cas, mais qu'une ou plusieurs des compétences requises correspondent à la description du groupe de *Connexion*, l'item est classé dans ce groupe. Dans tous les autres cas, l'item est classé dans le groupe de *Reproduction*, puisque toutes les compétences mathématiques cognitives qu'il fait intervenir correspondent à la description de ce groupe.

L'ÉVALUATION PISA DE LA *CULTURE MATHÉMATIQUE*

Caractéristiques des tâches

Cette section analyse de manière plus détaillée les caractéristiques des tâches utilisées pour évaluer les élèves, notamment leur nature et leurs divers formats.

Nature des tâches PISA de mathématiques

L'enquête PISA est une étude internationale qui vise à évaluer les connaissances et compétences des élèves à l'âge de 15 ans. Tous les items utilisés doivent convenir à la population des élèves de 15 ans des pays membres de l'OCDE.

Des correcteurs formés ont accès aux items, constitués d'informations servant de stimulus, d'une consigne et de la question proprement dite, et à la solution requise. De plus, ils disposent d'une grille de correction des items dont la réponse ne se prête pas à un codage automatique pour leur permettre de coder les réponses des élèves de manière cohérente et fiable dans tous les pays participants.

Les types de situations dans lesquels les items PISA de mathématiques s'inscrivent ont déjà été abordés dans les sections précédentes. Dans l'enquête PISA, les items se situent dans l'un des quatre types de situations suivants : situation personnelle, situation éducative/professionnelle, situation publique et situation scientifique. Les items sélectionnés pour constituer les épreuves PISA de mathématiques sont répartis entre ces divers types de situations.

Par ailleurs, sont privilégiés les contextes d'item considérés comme authentiques. En d'autres termes, l'enquête PISA donne la priorité aux tâches que les élèves pourraient rencontrer dans la vie courante et qui s'inscrivent dans des contextes où l'utilisation des mathématiques requise pour résoudre le problème constitue une démarche authentique. La préférence va aux problèmes dont le contexte extra-mathématique influence la solution et son interprétation, car ils servent au mieux les objectifs de l'évaluation des connaissances, compétences et processus mathématiques.

Les items de mathématiques sont sélectionnés de sorte que les quatre idées majeures soient bien représentées dans les épreuves, comme le prévoit le cadre conceptuel d'évaluation. Les items doivent se rattacher aux idées majeures (les catégories phénoménologiques de problèmes) décrites dans le cadre d'évaluation. De plus, ils doivent intégrer un ou plusieurs des processus mathématiques décrits dans le cadre d'évaluation, et doivent avoir une dimension qui les classe sans équivoque dans un groupe de compétences.

Le niveau de compétence en compréhension de l'écrit requis pour appréhender les items est étudié avec le plus grand soin lors de la conception des items et de leur sélection pour constituer les épreuves PISA de mathématiques. La formulation des items est la plus simple et la plus directe possible. On prend soin également d'éviter les items dont le contexte risque de créer un biais culturel.

Les items sélectionnés pour constituer les épreuves PISA présentent un large spectre de difficulté, afin de couvrir au mieux le large spectre théorique de compétence des élèves participant à l'enquête PISA. De plus, les grandes catégories définies dans le cadre d'évaluation (en particulier les groupes de compétences et les idées majeures) doivent autant que possible être représentées par des items dont le degré de difficulté est différent. Le degré de difficulté des items est évalué lors d'un essai de terrain de grande envergure, qui précède la sélection des items en vue de la campagne de test définitive.

Types d'items

Lors de la conception des instruments d'évaluation, il est impératif de tenir compte de l'impact du format des épreuves sur les performances des élèves et, donc, sur la définition du *construct* qui est évalué. Ce point est particulièrement pertinent dans un projet tel que l'enquête PISA, dont l'envergure internationale impose de lourdes contraintes concernant l'éventail de formats d'items utilisables.

L'évaluation PISA de mathématiques contient des items à réponse construite ouverte et fermée, et des items à choix multiple. Ces trois formats sont représentés en proportions à peu près égales dans les épreuves.

L'expérience acquise lors du développement, puis de l'administration des items à l'occasion du cycle PISA 2000 confirme que les items à choix multiple sont les plus adaptés à l'évaluation des compétences du groupe de *Reproduction* et du groupe de *Connexion*. L'exemple n° 23 illustre ce format d'item, avec un item classé dans le groupe de *Connexion* comportant un nombre limité d'options de réponse. Pour résoudre ce problème, les élèves doivent le traduire en termes mathématiques, concevoir un modèle qui représente la nature périodique du contexte décrit et prolonger la séquence pour obtenir un résultat qui correspond à l'une des options de réponse.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 23 : *LE PHOQUE*

Le phoque doit remonter à la surface pour respirer, même quand il dort. Martin a observé un phoque pendant une heure. Au début de l'observation, le phoque a plongé au fond de l'eau et s'est endormi. Au bout de 8 minutes, il s'est lentement laissé remonter à la surface et a respiré.

En 3 minutes, il a regagné le fond de la mer et le même cycle a recommencé depuis le début, selon un rythme très régulier.

LE PHOQUE – *QUESTION 1*

Au bout d'une heure, le phoque était :

A. Au fond.

B. En train de remonter à la surface.

C. En train de respirer.

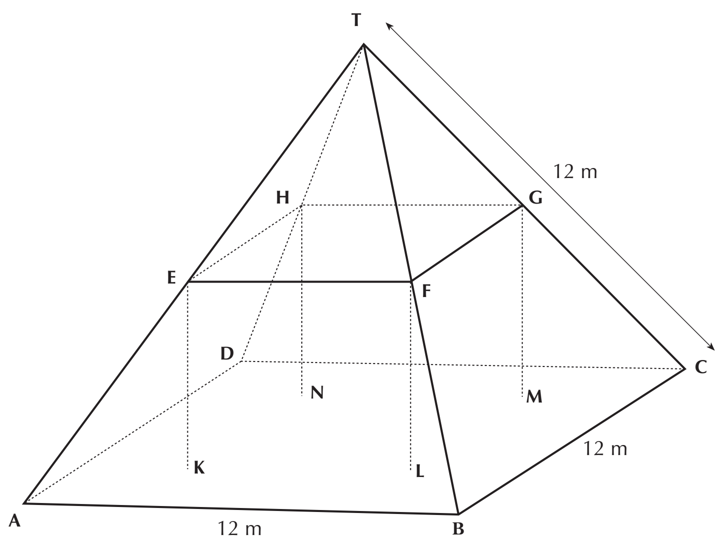
D. En train de redescendre vers le fond.

D'autres formats d'items sont souvent privilégiés dans le cas d'objectifs plus ambitieux et de processus plus complexes. Dans les items à réponse construite fermée, les questions posées sont analogues à celles des items à choix multiple, mais il est demandé aux élèves de produire une réponse qui peut être facilement déclarée correcte ou incorrecte. Avantage des items de ce type, les réponses données au hasard sont peu probables et il n'est pas nécessaire de prévoir des distracteurs (qui risquent d'influencer le *construct* à évaluer). Ainsi, le problème proposé dans l'exemple n° 24 n'a qu'une réponse correcte, mais beaucoup de réponses incorrectes sont possibles.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 24 : *FERMES*

Voici la photographie d'une ferme dont le toit est en forme de pyramide.

Ci-dessous se trouve un modèle mathématique du toit de la ferme, fait par un élève ; les mesures y ont été ajoutées.



Le sol du grenier, dénommé ABCD dans le modèle, est un carré. Les poutres qui soutiennent le toit sont les arêtes d'un bloc (parallélépipède rectangle) EFGHKLMN. E est le milieu de AT, F est le milieu de BT, G est le milieu de CT et H est le milieu de DT. Toutes les arêtes de la pyramide du modèle ont une longueur de 12 m.

FERMES – *QUESTION 1*

Calculez l'aire du sol du grenier ABCD.

Aire du sol du grenier ABCD = ______________ m^2

Les items à réponse construite ouverte exigent une réponse plus longue de la part des élèves et le processus d'élaboration de la réponse nécessite des démarches cognitives d'un niveau supérieur. Ces items demandent souvent aux élèves non seulement de fournir une réponse, mais aussi d'indiquer les étapes de leur raisonnement ou d'expliquer comment ils sont arrivés à la réponse. La caractéristique principale des items à réponse construite ouverte est qu'ils permettent aux élèves de démontrer leurs compétences en fournissant des solutions dans un large éventail de niveaux de complexité mathématique.

L'item présenté dans l'exemple n° 25 n'a pas été inclus dans les épreuves PISA, mais il illustre les caractéristiques des items à réponse construite ouverte.

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 25 : *INDONÉSIE*

L'Indonésie se situe entre la Malaisie et l'Australie. Quelques données sur la population de l'Indonésie et sa répartition sur les diverses îles sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Région	Superficie (km^2)	Pourcentage de la superficie totale	Population en 1980 (millions)	Pourcentage de la population totale
Java/Madura	132 187	6.95	91 281	61.87
Sumatra	473 606	24.86	27 981	18.99
Kalimantan (Bornéo)	539 460	28.32	6 721	4.56
Sulawesi (Célèbes)	189 216	9.93	10 377	7.04
Bali	5 561	0.30	2 470	1.68
Irian Jaya	421 981	22.16	1 145	5.02
TOTAL	1 905 569	100.00	147 384	100.00

L'un des problèmes importants de l'Indonésie est la répartition inégale de sa population sur les îles. Le tableau montre que Java, qui a moins de 7 % de la superficie totale, compte presque 62 % de la population.

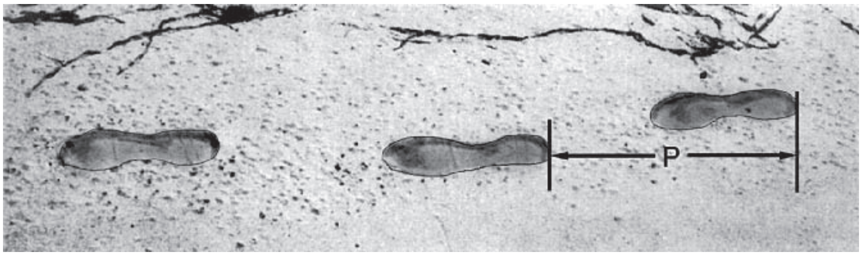
Source : de Lange et Verhage (1992). Reproduction autorisée.

INDONÉSIE – *QUESTION 1*

Dessinez un graphique (ou des graphiques) montrant la répartition inégale de la population indonésienne.

L'exemple suivant est un item à réponse construite ouverte qui a été utilisé lors du cycle PISA 2003 :

MATHÉMATIQUES – EXEMPLE N° 26 : *MARCHE À PIED*



L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas *P* est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.

Pour les hommes, la formule $\frac{n}{P} = 140$ donne un rapport approximatif entre *n* et *P*, où :

n = nombre de pas par minute ; et

P = longueur de pas en mètres.

MARCHE À PIED – *QUESTION 1*

Bernard sait que la longueur de son pas est de 0.80 mètre. La formule s'applique à sa façon de marcher.

Calculez la vitesse à laquelle marche Bernard en mètres par minute et en kilomètres par heure. Montrez vos calculs.

....

Un tiers environ des items PISA de mathématiques sont des items à réponse construite ouverte. Les réponses à ces items doivent être codées par des correcteurs expérimentés sur la base d'une grille de correction qui fait appel, dans une certaine mesure, à leur jugement professionnel. Comme il existe un risque potentiel de désaccord entre correcteurs, PISA met en œuvre des études de fiabilité des correcteurs afin de contrôler l'étendue de ces éventuels désaccords. On sait, par les études de ce type réalisées par le passé, qu'il est possible d'élaborer des grilles de correction sans ambiguïté et d'obtenir des codages fiables.

Dans l'enquête PISA, on utilise souvent un format d'unité particulier, qui consiste à associer plusieurs items à un même stimulus. Les tâches de ce format permettent d'impliquer les élèves dans le contexte ou le problème en leur soumettant une série de questions de complexité croissante. Les premières questions se présentent généralement sous forme d'items à choix multiple ou à réponse construite fermée, alors que les questions suivantes sont des items à réponse construite ouverte. Ce format peut être utilisé pour évaluer les trois groupes de compétences.

Une des raisons qui justifient le choix de ce format, un stimulus associé à plusieurs items, est qu'il permet de concevoir des tâches réalistes, qui reflètent la complexité de la vie courante. Une autre raison tient à l'utilisation efficace du temps de test, l'objectif étant de réduire le temps qu'il faut aux élèves pour comprendre le problème. La nécessité de préserver l'indépendance de chacun des scores attribués par rapport aux autres items est cependant reconnue et prise en compte dans la conception des épreuves PISA et des grilles de correction, tout comme la nécessité de minimiser les biais pouvant survenir en raison du nombre plus restreint de situations.

Structure de l'évaluation

Lors du cycle PISA 2003, dont la *culture mathématique* était le domaine majeur d'évaluation, 210 minutes d'épreuves ont été préparées. Les items sélectionnés ont été regroupés dans sept blocs d'items représentant chacun 30 minutes d'épreuve. Ces blocs ont été répartis entre les cahiers d'évaluation selon un schéma « tournant ». Les épreuves de mathématiques du cycle PISA 2006, dont le domaine majeur d'évaluation était la *culture scientifique*, étaient plus courtes qu'en 2003, mais les blocs d'items ont été constitués et répartis selon le même principe de cahiers tournants. Un dispositif semblable a été adopté pour constituer les épreuves de mathématiques du cycle PISA 2009. En outre, pour 2009, les blocs d'items sont restés inchangés par rapport au cycle PISA 2006 pour éviter tout impact dû aux facteurs de placement des items.

Le temps de passation des épreuves de mathématiques est réparti le plus également possible entre les quatre idées majeures (*Espace et formes*, *Variations et relations*, *Quantité* et *Incertitude*) et entre les quatre types de situation (*personnelle*, *éducative/professionnelle*, *publique* et *scientifique*). La proportion d'items associés aux compétences des trois groupes (*reproduction*, *connexion* et *réflexion*) est respectivement d'environ 25 %, 50 % et 25 %. Les items sont répartis de manière assez équivalente entre les trois formats, à savoir environ un tiers d'items à choix multiple, un tiers d'items à réponse construite fermée et un tiers d'items à réponse construite ouverte.

Outils et instruments

L'approche retenue dans l'enquête PISA est de permettre aux élèves de se servir de leur calculatrice et autres instruments d'usage courant dans leur école.

C'est la façon la plus authentique d'évaluer ce que les élèves sont capables de faire, et elle fournit la comparaison la plus éloquente de la performance des systèmes d'éducation. Le fait qu'un système scolaire ait choisi d'autoriser ou non ses élèves à utiliser des calculatrices ne diffère en rien, en principe, de toutes les autres décisions prises à l'échelle des systèmes concernant la politique d'éducation, que l'enquête PISA ne contrôle pas.

Les élèves qui ont d'habitude une calculatrice à leur disposition pour les aider à répondre aux questions seraient désavantagés s'ils en étaient privés.

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS EN MATHÉMATIQUES

Une échelle descriptive comportant six niveaux de compétence a été créée pour synthétiser les informations provenant des réponses aux épreuves PISA (Masters et Forster, 1996 ; Masters, Adams et Wilson, 1999). Cette échelle a été conçue sur la base d'un modèle statistique de réponse aux items permettant de traiter des réponses de type ordinal. Cette échelle globale permet de décrire la nature des performances observées, en classant les performances des élèves des divers pays en fonction des six niveaux de compétence. Elle sert donc de cadre de référence pour les comparaisons internationales.

La possibilité de créer un certain nombre de sous-échelles pour rendre compte des résultats du cycle PISA 2003, dont les mathématiques étaient le domaine majeur d'évaluation, a également été mise à l'étude. Ces sous-échelles pouvaient, de toute évidence, être basées sur les trois groupes de compétence ou les quatre idées majeures. Les décisions concernant la création de ces sous-échelles distinctes ont été prises compte tenu de divers critères, notamment d'ordre psychométrique, après analyse des données générées par les épreuves PISA. Pour permettre la mise en œuvre de ces options, il a fallu sélectionner un nombre suffisant d'items pour couvrir toutes les catégories susceptibles de faire l'objet de sous-échelles distinctes. Les items sélectionnés dans chaque catégorie devaient, en outre, présenter un spectre de difficulté suffisamment étendu pour permettre la construction des sous-échelles. La répartition des items entre ces catégories est restée en grande partie inchangée lors des cycles ultérieurs de l'enquête PISA, mais les résultats des élèves ne sont pas rapportés sur des sous-échelles de compétence lorsque les mathématiques sont un domaine mineur d'évaluation (PISA 2006 et PISA 2009).

Les groupes de compétences décrits dans ce cadre d'évaluation représentent des catégories conceptuelles de complexité et d'exigences cognitives croissantes, mais ils ne traduisent cependant pas une hiérarchie stricte des performances des élèves sur la base de la difficulté des items : la complexité conceptuelle n'est, en effet, qu'une des multiples composantes de la difficulté des items influant sur les niveaux de performance. Il en existe d'autres, notamment le caractère plus ou moins familier de la tâche, l'apprentissage plus ou moins récent, le degré d'entraînement, etc. En conséquence, un item à choix multiple faisant appel à des compétences du groupe de *Reproduction* (par exemple la question « Laquelle des figures suivantes est un parallélépipède rectangle ? », accompagnée de dessins représentant un ballon, une boîte de conserve, une boîte et un carré) peut se révéler très facile pour des élèves à qui l'on a enseigné la signification de ces termes, mais très difficile pour des élèves qui ne sont pas familiarisés avec cette terminologie. Il est possible de trouver des items relativement difficiles dans le groupe de *Reproduction* et des items relativement faciles dans le groupe de *Réflexion*, mais l'on s'attend à observer, dans l'ensemble, une relation positive entre le groupe de compétences et la difficulté des items.

Les facteurs qui expliquent le degré de difficulté des items et le niveau de compétence des élèves sont les suivants :

- *Le type et le degré d'interprétation et de réflexion requis :* en particulier, le type d'exigences découlant du contexte du problème, le fait que les caractéristiques mathématiques du problème soient apparentes ou que les élèves aient à développer leur propre conception mathématique du problème, et la mesure dans laquelle le problème implique une compréhension approfondie, un raisonnement complexe et de la généralisation.
- *La nature des compétences requises en matière de représentation :* cela inclut des problèmes où un mode de représentation seulement est utilisé, aussi bien que des problèmes qui demandent aux élèves de passer d'un mode de représentation à l'autre ou de trouver eux-mêmes le mode de représentation qui convient.
- *La nature et le niveau des compétences mathématiques requis :* des problèmes comportant une seule étape qui demandent uniquement aux élèves de restituer des faits mathématiques élémentaires et d'effectuer des calculs simples, aux problèmes en plusieurs étapes, faisant appel à des connaissances mathématiques plus pointues, des processus complexes de prise de décision et de traitement de l'information, ainsi que des compétences en résolution de problèmes et en modélisation.
- *La nature et le degré d'argumentation mathématique requis :* des problèmes qui ne requièrent pas d'argumentation ou qui demandent aux élèves de présenter des arguments bien connus, aux problèmes dans lesquels les élèves doivent élaborer des arguments mathématiques, comprendre l'argumentation d'autres personnes ou juger du bien-fondé de démonstrations ou d'arguments formulés par d'autres personnes.

Au niveau le plus bas de compétence, les élèves parviennent à effectuer des processus en une seule étape dans des items qui leur demandent de reconnaître des contextes familiers et des problèmes mathématiquement bien formulés, de reproduire des faits ou des processus mathématiques bien connus, et d'appliquer des savoir-faire élémentaires en calcul.

À des niveaux de compétence plus élevés, les élèves sont capables d'effectuer des tâches plus complexes, qui comportent plus d'une étape. Ils sont à même de combiner divers éléments d'information, d'interpréter des représentations différentes de concepts ou d'informations mathématiques, et d'identifier les aspects qui sont pertinents et importants et les relations qui existent entre eux. Ils peuvent utiliser des formulations et modèles mathématiques donnés, souvent sous forme algébrique, pour trouver des solutions et enchaîner plusieurs étapes de traitement ou de calcul pour produire une solution.

Au niveau de compétence le plus élevé, les élèves jouent un rôle plus créatif et plus actif dans leur approche des problèmes mathématiques. En règle générale, ils sont capables d'interpréter des informations plus complexes et d'enchaîner plusieurs étapes de traitement. Ils sont à même de formuler les problèmes et d'élaborer un modèle adapté pour faciliter la recherche de solution. À ce niveau de compétence, les élèves sont généralement capables d'identifier et de mettre en œuvre les moyens et les savoirs mathématiques pertinents dans des contextes peu familiers. Ils font preuve de perspicacité pour identifier une stratégie appropriée de résolution de problèmes et se servent de divers processus cognitifs d'ordre supérieur (généralisation, raisonnement et argumentation) pour expliquer ou communiquer leurs résultats.

La figure 2.10 montre les six niveaux de compétence décrits lors de l'enquête PISA 2003, accompagnés de leurs scores sur l'échelle PISA de *culture mathématique*. Les mêmes niveaux de compétence ont été utilisés pour rendre compte des résultats du cycle PISA 2006 et le seront également pour présenter ceux du cycle PISA 2009.

■ Figure 2.10 ■

Description succincte des six niveaux de compétence de l'échelle de culture mathématique

Niveau	Score minimum requis	Capacités caractéristiques
6	669.3	Au niveau 6, les élèves sont capables de conceptualiser, de généraliser et d'utiliser des informations sur la base de leurs propres recherches et de la modélisation de problèmes complexes. Ils peuvent établir des liens entre différentes représentations et sources d'information et passer de l'une à l'autre sans difficulté. Ils peuvent se livrer à des raisonnements et à des réflexions mathématiques difficiles. Ils peuvent s'appuyer sur leur compréhension approfondie et leur maîtrise des relations symboliques et des opérations mathématiques classiques pour élaborer de nouvelles approches et de nouvelles stratégies à appliquer lorsqu'ils sont face à des situations qu'ils n'ont jamais rencontrées. Ils peuvent décrire clairement et communiquer avec précision leurs actes et les fruits de leur réflexion – résultats, interprétations, arguments – qui sont en adéquation avec les situations initiales.
5	607.0	Au niveau 5, les élèves peuvent élaborer et utiliser des modèles dans des situations complexes pour identifier des contraintes et construire des hypothèses. Ils sont capables de choisir, de comparer et d'évaluer des stratégies de résolution de problèmes leur permettant de s'attaquer à des problèmes complexes en rapport avec ces modèles. Ils peuvent aborder les situations sous un angle stratégique en mettant en œuvre un grand éventail de compétences pointues de raisonnement et de réflexion, en utilisant des caractérisations symboliques et formelles et des représentations appropriées et en s'appuyant sur leur compréhension approfondie de ces situations. Ils peuvent réfléchir à leurs actes et formuler et communiquer leurs interprétations et leur raisonnement.
4	544.7	Au niveau 4, les élèves sont capables d'utiliser des modèles explicites pour faire face à des situations concrètes complexes qui peuvent leur demander de tenir compte de contraintes ou de construire des hypothèses. Ils peuvent choisir et intégrer différentes représentations, dont des représentations symboliques, et les relier directement à certains aspects de situations tirées du monde réel. Ils peuvent mettre en œuvre un éventail de compétences pointues dans ces situations et raisonner avec une certaine souplesse en s'appuyant sur leur compréhension de ces contextes. Ils peuvent formuler des explications et des arguments sur la base de leurs interprétations et de leurs actions et les communiquer.
3	482.4	Au niveau 3, les élèves peuvent appliquer des procédures bien définies, dont celles qui leur demandent des décisions séquentielles. Ils peuvent choisir et mettre en œuvre des stratégies simples de résolution de problèmes. Ils peuvent interpréter et utiliser des représentations de sources d'information différentes et construire leur raisonnement directement sur cette base. Ils peuvent rendre compte succinctement de leurs interprétations, de leurs résultats et de leur raisonnement.
2	420.1	Au niveau 2, les élèves peuvent interpréter et reconnaître des situations dans des contextes qui leur demandent tout au plus d'établir des inférences directes. Ils ne peuvent puiser des informations pertinentes que dans une seule source d'information et n'utiliser qu'un seul mode de représentation. Ils sont capables d'utiliser des algorithmes, des formules, des procédures ou des conventions élémentaires. Ils peuvent se livrer à un raisonnement direct et interpréter les résultats de manière littérale.
1	357.8	Au niveau 1, les élèves peuvent répondre à des questions s'inscrivant dans des contextes familiers, dont la résolution ne demande pas d'autres informations que celles présentes et qui sont énoncées de manière explicite. Ils sont capables d'identifier les informations et d'appliquer des procédures de routine sur la base de consignes directes dans des situations explicites. Ils peuvent exécuter des actions qui vont de soi et qui découlent directement du stimulus donné.

CONCLUSION

L'objectif de l'enquête PISA sur la culture mathématique est de produire des indicateurs qui montrent dans quelle mesure les pays ont réussi à préparer leurs élèves de 15 ans à devenir des citoyens actifs, réfléchis et intelligents sous l'angle de leur utilisation des mathématiques. Les épreuves PISA élaborées à cet effet cherchent à déterminer dans quelle mesure les élèves sont capables d'utiliser ce qu'ils ont appris. Elles donnent donc la priorité à la compréhension, aux savoirs et processus mathématiques permettant de résoudre des problèmes inspirés du quotidien ; elles proposent une grande variété de problèmes à résoudre, qui sont guidés et structurés à des degrés divers, mais qui placent les élèves face à des problèmes authentiques dans lesquels ils doivent raisonner par eux-mêmes.

Références

Blum, W. (1996), « Anwendungsorientierter Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven », in G. Kadunz *et al.* (éd.), *Trends und Perspektiven: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik,* vol. 23, Hoelder-Pichler-Tempsky, Vienne, pp. 15-38.

Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools (1982), *Mathematics Counts* (The Cockcroft Report), Her Majesty's Stationery Office, Londres.

de Corte, E., B. Greer et **L. Verschaffel** (1996), « Mathematics Teaching and Learning », in D.C. Berliner et R.C. Calfee (éd.), *Handbook of Educational Psychology,* Macmillan, New York, pp. 491-549.

de Lange, J. (1987), *Mathematics, Insight and Meaning*, CD-Press, Utrecht.

de Lange, J. (1995), « Assessment: No Change without Problems », in T.A. Romberg (éd.), *Reform in School Mathematics*, SUNY Press, Albany.

Devlin, K. (1994, 1997), *Mathematics, The Science of Patterns*, Scientific American Library, New York.

Dossey, J.A. (1997), « Defining and Measuring Quantitative Literacy », in L.A. Steen (éd.), *Why Numbers Count,* The College Board, New York, pp. 173-186.

Fey, J. (1990), « Quantity », in L.A. Steen (éd.), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy,* National Academy Press, Washington DC.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel, Dordrecht.

Grünbaum, B. (1985), « Geometry Strikes Again », *Mathematics Magazine*, vol. 58, n° 1, pp. 12-18.

Hershkowitz, R., B. Parzysz et **J. van Dormolen** (1996), « Space and Shape », in A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick et C. Laborde (éd.), *International Handbook of Mathematics Education, Part 1,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Mathematical Association of America (MAA) (1923), *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education; A Report of the National Committee on Mathematical Requirements,* The Mathematical Association of America, inc, Oberlin.

Masters, G. et **M. Forster** (1996), *Progress Maps*, Australian Council for Educational Research, Melbourne.

Masters, G., R. Adams et **M. Wilson** (1999), « Charting Student Progress », in G. Masters et J. Keeves (éd.), *Advances in Measurement in Educational Research and Assessment,* Elsevier Science, Amsterdam.

Mitchell, J., E. Hawkins, P. Jakwerth, F. Stancavage et **J. Dossey** (2000), *Student Work and Teacher Practice in Mathematics,* National Center for Education Statistics, Washington DC.

Neubrand, M., R. Biehler, W. Blum, E. Cohors-Fresenborg, L. Flade, N. Knoche, D. Lind, W. Löding, G. Möller et **A. Wynands** (Deutsche OECD/PISA-Expertengruppe Mathematik) (2001), « Grundlagen der Ergänzung des internationalen OECD/PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung », *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 33, n° 2.

Niss, M. (1999), « Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse », *Uddanneise,* vol. 9, pp. 21-29.

Norris, S. et **L. Phillips** (2003), « How Literacy in Its Fundamental Sense is Central to Scientific Literacy », *Science Education*, vol. 87, n° 2.

OCDE (2003), *Cadre d'évaluation de PISA 2003 : Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*, Éditions OCDE.

OCDE (2004), *Résoudre des problèmes, un atout pour réussir – Premières évaluations des compétences transdisciplinaires issues de PISA 2003,* Éditions OCDE.

OCDE (2005), *Are Students Ready for a Technology-Rich World?: What PISA Studies Tell Us,* Éditions OCDE.

OCDE (2006), *Compétences en sciences, lecture et mathématiques : Le cadre d'évaluation de PISA 2006*, Éditions OCDE.

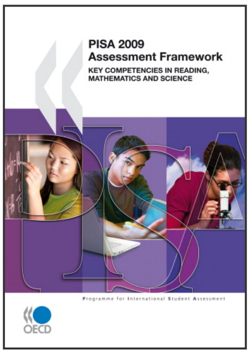
OCDE (2007), *PISA 2006 : Les compétences en sciences, un atout pour réussir : Volume 1 Analyse des résultats*, Éditions OCDE.

Schupp, H. (1988), « Anwendungsorientierter mathematikunterrricht in der sekundarstufe I zwischen tradition und neuen impulsen », *Der Mathematikunterricht*, vol. 34, n° 6, pp. 5-16.

Steen, L.A. (1990), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*, National Academy Press, Washington DC.

Steen, L.A. (éd.) (1997), *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America,* The College Board, New York.

Stewart, K. (1990), « Change », in L.A. Steen (éd.), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy,* National Academy Press, Washington DC.


PISA 2009
Assessment Framework
KEY COMPETENCIES IN READING, MATHEMATICS AND SCIENCE